

# 基于差分进化法的摆线轮修形技术研究

宋雪萍<sup>1</sup>,张积存<sup>2</sup>,毕爱宾<sup>1</sup>,刘畅<sup>1</sup>

(1. 大连交通大学 机械工程学院, 辽宁 大连 116028; 2. 东软集团(大连)有限公司, 辽宁 大连 116085)

**摘要:**为了提高摆线针轮的传动性能,以短幅外摆线内侧等距曲线为齿廓曲线的摆线轮为研究对象,以提高整机承载能力为目的,对摆线轮的齿廓进行优化修形。在不确定修正方式和修正量的情况下,制定优化目标,选择约束条件,运用 MATLAB 软件编程,在所选取的优化区间内,利用移距加等距组合修形曲线拟合逼近转角修形曲线的方法,得出最接近的共轭曲线的优化方式;利用差分进化法进行迭代,计算出最佳修形量;对优化后摆线轮的初始啮合间隙、变形量进行分析。研究表明,该优化方法可以较好地满足摆线针轮的修形要求。

**关键词:**摆线针轮;修形;差分进化法;最佳修形量;传动性能

**中图分类号:**TH132.414; TP391 **文献标志码:**A **文章编号:**1671-5276(2019)05-0097-03

## Research on Modification Technology of Cycloid Wheel Based on Differential Evolution Method

SONG Xueping<sup>1</sup>, ZHANG Jicun<sup>2</sup>, BI Aibin<sup>1</sup>, LIU Chang<sup>1</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Dalian Jiaotong University, Dalian 116028, China;

2. Neusoft Group (Dalian) Co., Ltd., Dalian 116085, China)

**Abstract:** To improve the transmission performance of the cycloid pin wheel, the cycloid wheel with the profile curve of the outer side of the short outer wobble is taken as research object, and the tooth profile of the cycloid wheel is optimized for the purpose of improving the bearing capacity of the whole machine. In the case of uncertain correction method and correction amount, the optimization target is set and the constraint condition is selected. The optimization method of the closest conjugate curve is obtained by using shifting and equidistant combination approximate to the corner modification optimization method in the selected optimization interval on based MATLAB. The iterated differential evolution method is used to calculate the optimal shape modified value. The initial meshing gap and deformation of the optimized cycloid wheel are analyzed. The research result shows that the optimization method can better meet the modification requirements of the cycloid pinwheel.

**Keywords:** cycloid pinwheel; modification shape; differential evolution method; optimal modified value; transmission performance

## 0 引言

随着现代工业的迅猛发展,尤其是工业机器人的发展,对减速器的需求也越来越大,要求体积更小、质量更轻、承载能力更大、效率高和延长使用年限等。普通减速器因其体积较大、结构不紧凑等缺点很难适应现代工业的发展。摆线针轮行星传动,是 K-H-V 型行星齿轮传动中的一种,它的结构空间更加合理优化,同时能够产生更大的传动比,获得更高的整机承载能力,传动效率也有很大的提升,因此大量应用在各种传动机构中。然而,在制造磨削摆线轮和针轮时,如果二者都以标准形式制造,则摆线轮与针轮是在没有间隙的情况下啮合传动,而在实际生产中,存在制造误差以及装配误差,并且在装配、拆卸和润滑时,需要留有一定间隙,因此为了满足平稳传动所需要的条件,必须对摆线轮齿廓曲线进行合理的修形,从而得到良好的传动效果。摆线轮作为关键的传动部件,其齿廓形状即便发生极其细小的变化都会对其传动性能,如回转

精度、啮合区间、受力分布等产生一定的影响。关于摆线轮的修形问题国内外专家学者都进行了相关的研究,由于此项技术的研究成果十分重要,国外对此保密。我国的学者近几年也在进行积极的研究和探索,关天民教授<sup>[1]</sup>在对摆线轮样机精确测量的基础上,运用非线性曲线拟合的最小二乘法原理建立了摆线轮齿廓形曲线的非线性拟合的数学模型;何卫东、李力行等<sup>[2]</sup>人建立了综合等距修形、移距修形、转角修形为一体的通用摆线轮齿廓方程,并通过测试国内外样机的实际齿形,对摆线轮齿廓进行反求研究,验证了修形方程的正确性;文献[3]将二阶对数修形量沿法线方向叠加至理论齿廓,导出对数修形齿廓方程,通过修改参数可达到控制齿廓曲线不同位置的修形量。文献[4]通过计算分析,对修形方法进行了相关探索。在总结前人研究成果的基础上<sup>[5-6]</sup>,提出了在不确定修正方式和修正量的情况下,针对基本参数已定的摆线轮,以提高整机承载能力为主要优化目标,对摆线轮进行优化修形,利用移距加等距组合修形曲线拟合逼近转角修形的方法,得出最接近的共轭曲线的优化方式,利用差分

**基金项目:**国家自然科学基金(51605069);辽宁省自然科学基金重点项目(20170540112)

**作者简介:**宋雪萍(1977—),女,河北武安人,副教授,博士,研究方向为转子动力学,故障诊断等。

进化法迭代,计算出最佳修形量,并对优化后摆线轮的初始啮合间隙、变形量进行分析,对比其传动性能,为摆线轮的修形提供一定的理论基础。

## 1 摆线轮的齿廓方程

在与标准针齿啮合运动时,与针齿齿廓共轭同时属于无间隙啮合的摆线轮齿形,就称作标准齿形。将摆线轮的圆心视为原点,将穿过原点并且与摆线轮齿齿槽的中心线对齐的轴线作为 $x_c$ ,如图1所示,标准齿形方程<sup>[7]</sup>为:

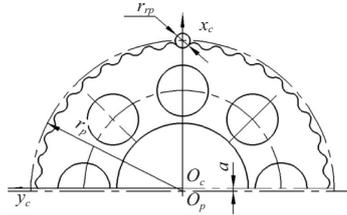


图1 摆线轮齿形图

$$x_c = [r_p - r_{rp} s^{-\frac{1}{2}}] \cos[(1-i^H)\varphi] - [a - K_1 r_{rp} s^{-\frac{1}{2}}] \cos i^H \varphi \quad (1)$$

$$y_c = [r_p - r_{rp} s^{-\frac{1}{2}}] \sin[(1-i^H)\varphi] + [a - K_1 r_{rp} s^{-\frac{1}{2}}] \sin i^H \varphi \quad (2)$$

其中: $s=f(K_1, \varphi) = 1+K_1^2-2K_1 \cos \varphi$ ,  $K_1 = az_p/r_p$ ;  $z_p$ 为针轮的齿数; $z_c$ 为摆线轮的齿数; $i^H$ 为摆线轮与针轮的相对传动比,  $i^H = z_p/z_c$ ;  $\varphi$ 为转臂相对于某一针齿中心矢径的转角,即啮合相位角( $^\circ$ )。

将等距与移距两种方式结合起来,建立其数学模型,确定合理的修形量大小,保证修形后的摆线轮工作部分的齿廓曲线与相应的转角修形的偏差值最小。将 $r_p$ 以 $(r_p + \Delta r_p)$ 代替, $K_1$ 以 $K_1 = az_p/(r_p + r_p)$ 代替, $r_{rp}$ 以 $(r_{rp} + \Delta r_{rp})$ 代替, $i^H \varphi$ 以 $(i^H \varphi + \delta)$ 代替,则改变参数后的齿廓方程为:

$$x_c = [r_p + \Delta r_p - (r_{rp} + \Delta r_{rp}) s_T^{-\frac{1}{2}}] \cos[(1-i^H)\varphi - \delta] - [a/(r_p + \Delta r_p)] [r_p + \Delta r_p - z_p (r_{rp} + \Delta r_{rp}) s_T^{-\frac{1}{2}}] \cos(i^H \varphi + \delta) \quad (3)$$

$$y_c = [r_p + \Delta r_p - (r_{rp} + \Delta r_{rp}) s_T^{-\frac{1}{2}}] \sin[(1-i^H)\varphi - \delta] + [a/(r_p + \Delta r_p)] [r_p + \Delta r_p - z_p (r_{rp} + \Delta r_{rp}) s_T^{-\frac{1}{2}}] \sin(i^H \varphi + \delta) \quad (4)$$

其中: $s_T = s_T(K_1', \varphi) = 1+K_1'^2-2K_1' \cos \varphi$ ;  $K_1'$ 为有移距修形时的短幅系数,  $K_1' = az_p/(r_p + \Delta r_p)$ 。

## 2 摆线轮的齿形优化

### 2.1 设计变量

文中设计变量设定2个<sup>[8]</sup>,即等距修形量和移距修形量:

$$D = \begin{pmatrix} Dr_{rp} \\ Dr_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta r_{rp} \\ \Delta r_p \end{pmatrix} \quad (5)$$

其中: $Dr_{rp}$ 为等距修形量,  $Dr_p$ 为移距修形。

为了满足摆线针轮啮合传动时具有足够的润滑间隙并且能够顺利装配和拆卸,应该对摆线轮进行转角修形。但是实际生产时,转角修形方式十分复杂,加工精度又难

以控制,所以只需使等移距修形的齿廓曲线最大限度地接近转角修形的齿廓曲线。根据补偿制造误差,保证润滑条件等要求,转角修形量可以预先给出,根据文献[8],可以选择转角修形量 $\delta = 0.005 \text{ rad}$ 为本文计算基本参数。

### 2.2 目标函数

按照已给定的参数 $r_p, r_{rp}, a, z_p, z_c, \delta$ ,如表1所示。

表1 摆线轮基本参数计算

摆线轮基本参数	计算数据
摆线轮齿数 $z_c$	39
针轮齿数 $z_p$	40
针齿中心圆半径 $r_p/\text{mm}$	82
针轮半径 $r_{rp}/\text{mm}$	5
偏心距 $a/\text{mm}$	1.5
短幅系数 $K_1$	0.731 7
齿数系数 $K_2$	1.287 4

将数据带入只含有转角修形量的摆线轮齿形方程,计算出齿形坐标:

$$x_c = [r_p - r_{rp} s^{-\frac{1}{2}}] \cos[(1-i^H)\varphi - \delta] - [a - K_1 r_{rp} s^{-\frac{1}{2}}] \cos(i^H \varphi + \delta) \quad (6)$$

$$y_c = [r_p - r_{rp} s^{-\frac{1}{2}}] \sin[(1-i^H)\varphi - \delta] + [a - K_1 r_{rp} s^{-\frac{1}{2}}] \sin(i^H \varphi + \delta) \quad (7)$$

其中: $s=f(K_1, \varphi) = 1+K_1^2-2K_1 \cos \varphi$ ,  $K_1 = az_p/r_p$ 。

将设计变量和已知参数带入等移距修形的摆线轮齿廓方程表示摆线轮齿形坐标:

$$x'_c = [r_p + \Delta r_p - (r_{rp} + \Delta r_{rp}) s_T^{-\frac{1}{2}}] \cos[(1-i^H)\varphi] - [a/(r_p + \Delta r_p)] [r_p + \Delta r_p - z_p (r_{rp} + \Delta r_{rp}) s_T^{-\frac{1}{2}}] \cos(i^H \varphi) \quad (8)$$

$$y'_c = [r_p + \Delta r_p - (r_{rp} + \Delta r_{rp}) s_T^{-\frac{1}{2}}] \sin[(1-i^H)\varphi] - [a/(r_p + \Delta r_p)] [r_p + \Delta r_p - z_p (r_{rp} + \Delta r_{rp}) s_T^{-\frac{1}{2}}] \sin(i^H \varphi) \quad (9)$$

其中: $s_T = s_T(K_1', \varphi) = 1+K_1'^2-2K_1' \cos \varphi$ ;  $K_1'$ 为有移距修形时的短幅系数,  $K_1' = az_p/(r_p + \Delta r_p)$ 。

当已知基本参数时,移距修形的摆线轮齿形坐标只取决于 $\Delta r_{rp}, \Delta r_p$ ,转角修形的摆线轮齿形坐标只取决于 $\delta$ 。本次优化设计预先将 $\delta$ 设定为0.005,则转角修形的曲线 $L$ 即能确定。由于随机一组 $\Delta r_{rp}, \Delta r_p$ 所确定的摆线轮齿廓曲线 $L$ 不能保证与曲线 $L$ 相吻合,所以若能够找出一组合适的等移距修形量使得曲线 $L$ 和 $L'$ 能够最大程度地接近,这组数据即为所求。将 $M, M'$ 视为两种修形方式下的齿廓曲线上的点,则目标函数即 $M$ 与 $M'$ 差的最小值。可以选取 $[0, \pi]$ 区间,分别将这两种修形方式下的曲线分成 $m$ 分,得到 $m+1$ 个坐标点,即可用这 $m+1$ 个坐标点偏差绝对值的平均值作为衡量曲线 $L$ 与 $L'$ 的偏离程度的指标,即目标函数 $F$ 为:

$$F(\Delta r_{rp}, \Delta r_p) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m PM - M'P \quad (10)$$

其中 $PM - M'P = \sqrt{(x_c - x'_c)^2 + (y_c - y'_c)^2}$ 。

当 $F(\Delta r_{rp}, \Delta r_p) = \min F(\Delta r_{rp}, \Delta r_p)$ 时,所取得的一组 $\Delta r_{rp}, \Delta r_p$ 即为能够使曲线 $L$ 与 $L'$ 最大程度吻合的值。

## 2.3 约束条件

因为等距修形方式未知,但齿廓修形之后应该保证产生一定的径向间隙,则等距修形量和移距修形量应该满足一定的条件<sup>[8]</sup>,如式(11)所示。若 $\Delta r_{rp} > 0, \Delta r_p > 0$ ,则 $\Delta r_{rp} - \Delta r_p > 0$ ;若 $\Delta r_{rp} > 0, \Delta r_p < 0$ ,则 $\Delta r_{rp} + \Delta r_p > 0$ 。综上: $\Delta r_{rp} > 0$ ,则

$$\Delta r_{rp} - |\Delta r_p| > 0 \quad (11)$$

## 3 摆线轮修形量确定

文中采用差分进化法进行修形量的确定,差分进化法是一种迭代算法,其优点是稳定性好,收敛时间短。主要有3个控制参数:种群规模( $NP$ )、缩放因子( $F$ )、交叉概率( $CR$ )。

$NP$ 为种群信息量,取值越大则种群信息量越丰富,计算量也随之增大;

$CR$ 为信息量的交换程度,取值越大则在交叉的过程中,子代与父代、中间变异体之间交换频繁;

$F$ 为影响寻优能力, $F$ 取值越大,算法能更快跳出局部极小点。

优化编程时,分别设定 $NP=10, CR=0.3, F=0.4$ 。

流程如图2所示。

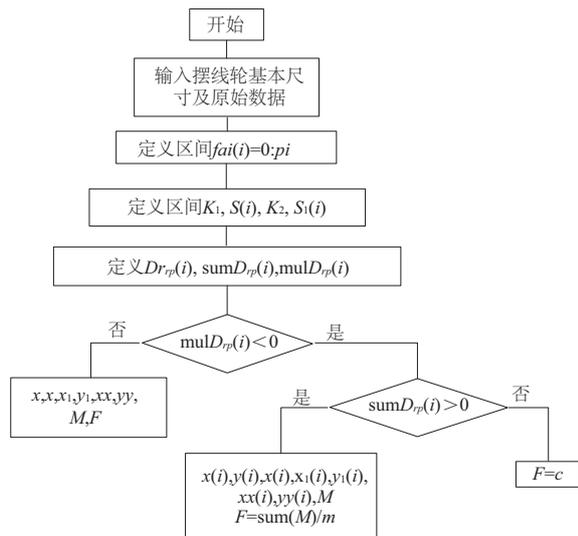


图2 算法流程图

其中: $K_1$ 为转角修形时的短幅系数; $K_2$ 为等距修形时短幅系数; $\text{sum}D_{rp}(i) = D_{rp}(i) + D_{rp}(i)$ ;  $\text{mul}D_{rp}(i) = D_{rp}(i) \times D_{rp}(i)$ ;  $x(i), y(i)$ 为采用等距修形方式时,摆线轮齿形坐标; $x_1(i), y_1(i)$ 为采用转角修形方式时,摆线轮齿形坐标; $xx(i) = x_1(i) - x(i)$ ;  $yy(i) = y_1(i) - y(i)$ ;  $F$ 为目标函数。

## 4 结果分析

### 4.1 齿形对比

根据计算结果如表2所示,当设定转角修形量都为 $\delta=0.005$  rad的条件下,两种方式修形后的等距修形量的数值是相同的,都为 $\Delta r_{rp} = +0.3205$  mm,相对比之下,负移

距的齿廓曲线距离转角修形的齿廓曲线的偏离程度更大一些,但两种修形方式的齿形都与标准齿形相似,如图3所示。

表2 摆线轮优化设计计算数据

指标名称	摆线轮修形方式		
	正等距正移距	正等距负移距	标准齿形
转角修形量( $\delta$ )/mm	0.005	0.005	0
等距修形量( $D_{rp}$ )/mm	0.320 5	0.320 5	0
移距修形量( $D_{rp}$ )/mm	0.074 2	-0.292 9	0
偏心距( $a$ )/mm	1.5	1.5	1.5
针齿中心圆半径( $r_p$ )/mm	82.320 5	82.320 5	82
针轮半径( $r_{rp}$ )/mm	5.074 2	4.707 1	5
短幅系数( $K_1$ )	0.728 9	0.728 9	0.731 7
针齿系数( $K_2$ )	1.272 9	1.372 1	1.286 7
摆线轮齿顶圆半径( $r_{ac}$ )/mm	78.253 7	77.886 6	78.5
摆线轮齿根圆半径( $r_{fc}$ )/mm	75.253 7	74.886 6	75.5
径向间隙量( $\Delta j$ )/mm	0.246 3	0.027 6	0

通过观察齿形及数据计算能够得出,正等距正移距修形时能够产生径向间隙量为 $\Delta j=0.2463$  mm,正等距负移距修形时能够产生径向间隙量为 $\Delta j=0.0276$  mm,采用这种拟合式逼近修形方式能有效保证实际传动中要求的啮合间隙,保证与针轮啮合运转时也不会产生“卡死”现象。

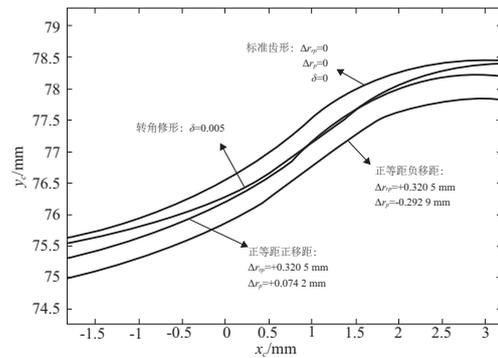


图3 齿形对比图

### 4.2 变形量分析

通过分析计算发现正等距负移距的总变形量数值更小一些,如表3所示。这种情况更容易减小齿面点蚀的概率,啮合间隙的分布更合理,而利用 $\delta i > \Delta(\psi)i$ 的条件所判断出的啮合齿号也与接触力的计算结果相对应。由于 $\psi_m, \psi_n$ 的值具有合理的参考范围,其值过大或是过小都会使得该处的轮齿在压力角很大而力臂很小的状态下传递受力,这样会使传动效率大为降低,合理的 $\psi_m, \psi_n$ 的范围是 $25^\circ < \psi_m, \psi_n < 100^\circ$ 。根据数据,可以观察到采用正等距负移距修形方式时,摆线轮的工作区间相对合理,同时传力齿数也更加贴合生产实际。

(下转第104页)