

# 基于通用生成函数的复合材料层合板可靠性分析

许伟红<sup>1</sup>,刘成龙<sup>2</sup>,周金宇<sup>2</sup>

(1. 南京新港中等专业学校,江苏 南京 210046; 2. 江苏理工学院 机械工程学院,江苏 常州 213000)

**摘要:**针对纤维增强复合材料层合板可靠性分析中存在的多变量、非正态、非线性功能函数和相关性等问题,采用通用生成函数法,基于 Tsai-Hill 强度理论构建各单层板的抗力生成函数,根据首层失效准则建立层合板可靠性分析模型。在生成函数复合运算中,通过同类项合并和 K-means 聚类技术缩减计算量,提高效率。该方法为复合材料层合板可靠性分析开辟了一条新途径。

**关键词:**复合材料层合板;可靠性;通用生成函数;K-means 聚类

**中图分类号:**TB332 **文献标志码:**A **文章编号:**1671-5276(2019)06-0034-05

## Reliability Analysis of Fiber Reinforced Composite Laminates Based on Universal Generating Function

XU Weihong<sup>1</sup>,LIU Chenglong<sup>2</sup>,ZHOU Jinyu<sup>2</sup>

(1. Xingang Vocational School, Nanjing 210046, China; 2. Jiangsu University Technology School of Mechanical Engineering, Changzhou 213000, China)

**Abstract:** Because multivariable, non-normal, non-linear performance function exists in reliability analysis of the fiber reinforced composite laminates, this paper adopts the universal generating function method in it, defines the resistance generating function of single-layer plates based on the Tsai-Hill strength theory, and builds the model for the reliability analysis of the laminates according to the first ply failure criteria. In the complex operation of generating functions, like terms collecting and K-means clustering techniques are used to reduce computational costs and improve efficiency. A new idea is provided for reliability analysis of the composite laminates.

**Keywords:** composite laminates; reliability; universal generating function; K-means clustering

## 0 引言

生成函数是现在离散数学领域中的重要分析工具,它能以统一的程序方式处理和解决众多不同类型的问题。USHAKOV I<sup>[1]</sup>最早提出了生成函数法,而 LEVITIN G 和 LISNIANSKI A 等人对生成函数进行了进一步扩展<sup>[2]</sup>。文献[3]利用通用生成函数法实现了对静定、静不定结构系统静强度可靠性分析,并充分考虑了结构元件之间因孪生载荷产生的失效相关性。高鹏等<sup>[4]</sup>借助改进的生成函数法研究共因失效和载荷多次作用效应对多状态系统可靠性的影响。郭惠昕等<sup>[5]</sup>在结构系统的可靠性分析中,提出一种区间值型的通用生成函数,在此基础上还提出基于直方图的应力-强度干涉模型,通过定义概率质量加权系数来分析结构系统的可靠度。文献[6]提出一种改进的生成函数法,可有效避免区间扩展及高估计问题,为具有共因失效和区间数据的多状态系统可靠性评估提供了一种分析方法。JAFARY B 和 FIONDELLA L<sup>[7]</sup>提出了用于多状态系统可靠性评估的通用生成函数法并对其扩展,考

虑了多状态组件元素之间的相关性,可用于高效的性能和可靠性评估以及相关性影响的敏感性分析。

纤维增强复合材料作为装备轻量化的选材之一,由于复合材料组分材料存在各向异性和较大的分散性等特点<sup>[8]</sup>,在强度分析时,涉及到外载、结构尺寸和强度参数等众多不确定因素,导致众多随机变量的产生,而通常情况下随机变量的统计信息与正态分布不尽相符,多呈非正态分布;单层板(失效单元)的 Tsai-Hill 强度准则、Tsai-Wu 强度准则和 Hoffman 强度准则等<sup>[9]</sup>功能函数多为非线性形态;层合板各失效单元之间会因同一随机载荷的作用,存在失效相关性。这些给复合材料层合板的可靠性分析带来了一定困难。

生成函数法可通过跨尺度传递各随机变量的统计信息,替代概率分布函数描述宏观强度、刚度及细观随机源等,通过复合算子的特性实现随机变量统计信息从细观向宏观的跨尺度精确传递,避免因忽略尺寸效应和非正态随机性导致的分析误差。

本文运用生成函数法对复合材料层合板进行可靠性分析,构建了层合板各失效单元的抗力生成函数,并定义

**基金项目:**国家自然科学基金(51275221);江苏省高校自然科学研究重大项目(16KJA460002)

**作者简介:**许伟红(1971—),女,江苏南京人,高级讲师,硕士,研究方向为现代机械设计方法。

不同的复合算子及相应的性能结构函数,建立了基于首层失效<sup>[10]</sup>的层合板可靠性模型,通过同类项合并和 K-means 聚类<sup>[11]</sup>技术提高运算效率。和现有的方法相比,该方法具有较高的可靠度计算精度,为复合材料层合板可靠性分析提供了一种新的方法。

## 1 通用生成函数理论

通用生成函数以多项式的形式表达单元或系统的性能分布,其表达式描述了随机变量的取值与其值所对应的概率之间的关系。其中,复合算子则描述了各随机变量之间的运算规律。

设系统中有  $n$  个独立的随机变量  $X_i, 1 \leq i \leq n$ , 其性能结构函数为  $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , 其中各随机变量  $X_i$  存在  $k_i$  中状态,且满足概率  $p_{ij} = Pr(X_i = x_{ij})$  分布,其状态性能值和所对应的概率值的集合分别为:

$$\begin{aligned} X_i &= \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik_i}\} \\ p_i &= \{p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{ik_i}\} \end{aligned} \quad (1)$$

可由通用生成函数多项式描述为

$$U_i(z) = \sum_{j=1}^{k_i} p_{ij} z^{x_{ij}} \quad (2)$$

式中:多项式指数表示随机变量的离散状态值;多项式系数表示与离散状态值相对应的概率。

若随机变量的通用生成函数记为  $U_i(z)$ , 系统的通用生成函数记为  $U_s(z)$ , 则  $U_s(z)$  可通过各随机变量通用生成函数的复合运算表示为

$$U_s(z) = \otimes_f (U_1(z), U_2(z), \dots, U_n(z)) \quad (3)$$

式中  $\otimes_f$  为复合算子,具体运算规则为:

$$\begin{aligned} \otimes_f (U_1(z), U_2(z), \dots, U_n(z)) &= \\ \otimes_f \left( \sum_{j_1=1}^{k_1} p_{1j_1} z^{x_{1j_1}}, \sum_{j_2=1}^{k_2} p_{2j_2} z^{x_{2j_2}}, \dots, \sum_{j_n=1}^{k_n} p_{nj_n} z^{x_{nj_n}} \right) &= \\ \sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} \dots \sum_{j_n=1}^{k_n} \left( \left( \prod_{i=1}^n p_{ij_i} \right) z^{f(x_{1j_1}, x_{2j_2}, \dots, x_{nj_n})} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

式中:各随机变量通用生成函数的概率系数相乘,而指数由性能结构函数  $f$  决定,其运算结果可取标量形式,也可取向量或矩阵形式<sup>[4,12]</sup>。

由式(4)可知,  $U_s(z)$  中含有状态组合的总项数为  $k = k_1 \times k_2 \times \dots \times k_n$ , 若存在同类项,可对同类项进行合并减少总项数。例如在通用生成函数  $\sum_{j=1}^k p_j z^{x_j}$  中,若存在  $x_i \approx x_m (i, m \in \{1, \dots, k\})$ , 则对应的  $p_i z^{x_i}$  和  $p_m z^{x_m}$  项为同类项,由于

$$\begin{aligned} Pr\{(X=x_i) \cup (X=x_m)\} &= \\ Pr\{(X=x_i)\} + Pr\{(X=x_m)\} &= p_i + p_m \end{aligned} \quad (5)$$

所以两项合并为  $(p_i + p_m) z^{x_i}$  或  $(p_i + p_m) z^{x_m}$ 。

在通用生成函数的复合运算中,性能结构函数  $f(\cdot)$  通常具有如下性质:

### 1) 递推性

设系统由  $n$  个元件组成,若包含前  $j$  个元件 ( $2 \leq j \leq n$ ) 的子系统性能结构函数满足

$$f(X_1, \dots, X_j) = f(f(X_1, \dots, X_{j-1}), X_j)$$

$$\otimes_f (U_1(z), \dots, U_j(z)) = \otimes_f (\otimes_f (U_1(z), \dots, U_{j-1}(z)), U_j(z)) \quad (6)$$

### 2) 可分性

若性能结构函数满足

$$f(X_1, \dots, X_j, X_{j+1}, \dots, X_n) =$$

$$f(f(X_1, \dots, X_j), f(X_{j+1}, \dots, X_n))$$

$$\otimes_f (U_1(z), \dots, U_n(z)) =$$

$$\otimes_f (\otimes_f (U_1(z), \dots, U_j(z)), \otimes_f (U_{j+1}(z), \dots, U_n(z))) \quad (7)$$

### 3) 互换性

若性能结构函数满足

$$f(X_1, \dots, X_j, X_{j+1}, \dots, X_n) = f(X_1, \dots, X_{j+1}, X_j, \dots, X_n)$$

$$\otimes_f (U_1(z), \dots, U_j(z), U_{j+1}(z), \dots, U_n(z)) =$$

$$\otimes_f (\otimes_f (U_1(z), \dots, U_{j+1}(z)), \otimes_f (U_j(z), \dots, U_n(z))) \quad (8)$$

利用以上性质,一方面可实现复杂结构系统众多随机变量的递推复合,满足随机信息从微观向宏观的跨尺度精确传递,且能避免忽略非正态性而导致的分析误差;另一方面针对功能函数的高维非线性形态,可在依次实施多变量概率运算过程中实时对通用生成函数进行有条件的同类项合并操作,有望在确保分析精度的条件下大规模缩减计算量。

通用生成函数包含了单元或系统中的性能和概率信息,可用于计算各类可靠性指标<sup>[2]</sup>。设系统性能分布的通用生成函数为

$$U(z, t) = \sum_{j=1}^k p_j(t) z^{x_j} \quad (9)$$

对其系数进行条件求和,可得系统可靠度

$$\begin{aligned} R(t, w) &= Pr\{X(t) > w\} = \delta(U(z, t), w) = \\ &= \sum_{j=1}^k (p_j(t) I(x_j - w > 0)) \end{aligned} \quad (10)$$

式中:  $\delta(\cdot)$  为条件求和算子;  $I(x_j - w > 0)$  为示性函数,当  $x_j > w$  时等于 1, 反之为 0,  $w$  表示系统安全、失效两性能状态的临界值。

## 2 K-means 聚类

K-means 聚类算法<sup>[13]</sup>是将数据对象(矩阵或向量)划分为  $K$  个类别,设初始聚类中心为  $c_i (i=1, 2, \dots, K)$ , 采用距离误差 2 范数的最小值为判据实现数据的分类。其中判据准则表示为:

$$\|x_j - c_i\|_2 = \min \|x_j - c_i\|_2 \quad (11)$$

式中:  $x_j$  为第  $j$  个样本,  $j=1, \dots, J$ ;  $c_i$  是第  $i$  类质心,把  $J$  个样本分别划分到  $K$  个类中。

K-means 聚类算法流程包括以下 4 个步骤:

1) 随机选取  $K$  个样本作为初始聚类中心。

2) 根据式(11),将每个数据样本  $x_j$ , 找到离它最近的聚类中心,将其分配到该类。

3) 计算各类样本均值  $E(c_i) = \frac{1}{N_i} \sum_{s=1}^{N_i} x_s (N_i \text{ 为各类中的样本数})$ , 并用  $E(c_i)$  作为该类的新聚类中心  $c_i$ 。

4) 重复步骤 2)、3), 直至  $\sum_{i=1}^K \|E(c_i) - c_i\|_2 \leq \varepsilon$  则聚类结束。其中  $\varepsilon$  为预定的收敛精度。

例如通用生成函数为  $\sum_{i=1}^J p_i z^{x_i}$ , 质心为  $x_c$  的类别包含  $x_1, x_2$  和  $x_c$  3 个样本, 则生成函数的  $p_1 z^{x_1}, p_2 z^{x_2}, p_c z^{x_c}$  3 项可合并为  $(p_1 + p_2 + p_c) z^{x_c}$  1 项。

### 3 失效单元的失效相关性

复合材料层合板可视为由多个失效单元组成的结构系统。对于首层失效问题, 任一失效单元失效即导致结构系统失效, 失效路径为各失效单元所组成的串联系统。需考虑承受共同随机载荷源引起的各失效单元之间的相关性。

结构系统各失效单元的失效相关性主要与系统的外载分散性有关<sup>[3]</sup>, 而各失效单元抗力的分散性导致相关性程度的减小。若对外载和失效单元抗力随机变量进行离散化, 则在外载为某一特定离散值的条件下, 失效单元失效与否仅取决于各自的抗力分布, 可按式计算首层失效的层合板可靠度:

$$R = \sum_{j=1}^{M_4} (p_{Q_j} \sum_{i=1}^K p_i I(D_i - Q_j > 0)) \quad (12)$$

式中: 系统外载荷离散为  $Q_1, \dots, Q_{M_4}$ , 对应的各状态概率为  $p_{Q_1}, \dots, p_{Q_{M_4}}$ ; 指数  $D_i$  代表最薄弱失效单元的抗力性能值; 系数  $p_i$  表示相应的概率值。

## 4 层合板强度可靠性分析

### 4.1 层合板强度分析

对于对称层合板, 承受  $N_x, N_y, N_{xy}$  面向载荷, 因  $B_{ij} = 0$  (拉弯耦合刚度不存在), 载荷与中面应变有如下关系:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

式中  $A_{ij}$  表示拉伸刚度系数。

设  $N_x, N_y, N_{xy}$  按比例加载, 令  $N_x = d, N_y = \alpha d, N_{xy} = \beta d$ , 则式(13)可表示为

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} d \\ \alpha d \\ \beta d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_{xy} \end{bmatrix} d \quad (14)$$

式中:  $A^{-1}$  为逆矩阵;  $\alpha$  和  $\beta$  为加载比例系数;  $A_x = A'_{11} + \alpha A'_{12} + \beta A'_{16}$ ;  $A_y = A'_{12} + \alpha A'_{22} + \beta A'_{26}$ ;  $A_{xy} = A'_{16} + \alpha A'_{26} + \beta A'_{66}$ 。

根据失效单元的应力-应变转轴关系式<sup>[9]</sup> 得出各层应力, 其中第  $k$  层应力为

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k = \bar{Q}_k \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_{xy} \end{bmatrix} d \quad (15)$$

式中:  $\bar{Q}_k = T_k^{-1} Q_k (T_k^{-1})^T$ ,  $T_k$  表示第  $k$  层板坐标转换矩阵,  $Q_k$  为二维刚度矩阵,  $\bar{Q}_k$  为二维刚度矩阵的转换矩阵。

各失效单元在材料主方向上的应力为

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}_k = T_k \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k = T_k \bar{Q}_k \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_{xy} \end{bmatrix} d \quad (16)$$

失效单元的极限状态可由 Tsai-Hill 准则描述为

$$\frac{\sigma_1^2}{X^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} = 1 \quad (17)$$

式中:  $\sigma_1, \sigma_2$  和  $\tau_{12}$  为单位载荷下定向层平面内的主向应力;  $X, Y$  和  $S$  为层合单元纵向、横向及剪切强度。

将式(16)的计算结果  $\sigma_1 = a_1 d, \sigma_2 = a_2 d, \tau_{12} = a_3 d$  代入式(17), 求出各失效单元的抗力:

$$d_{\max} = \sqrt{\frac{X^2 Y^2 S^2}{Y^2 S^2 (a_1^2 - a_1 a_2) + X^2 S^2 a_2^2 + X^2 Y^2 a_3^2}} \quad (18)$$

式中:  $d_{\max}$  为各失效单元所承受的极限载荷(抗力);  $a_1 = T_k \bar{Q}_k A_x, a_2 = T_k \bar{Q}_k A_y, a_3 = T_k \bar{Q}_k A_{xy}$ 。

### 4.2 首层失效可靠性建模

对于首层失效问题, 由  $n$  各单元组成的结构系统, 当其中任意单元失效, 结构系统即失效。对于  $n$  个单元构成的结构系统可视为串联系统。

首先构造载荷、拉伸强度和剪切强度生成函数来描述外载荷  $Q$ 、纵向拉伸强度  $X_T$ 、横向拉伸强度  $Y_T$  和剪切强度  $S$  的性能状态分布:

$$U_a(z) = \sum_{j_i=1}^{M_i} p_{a_{j_i}} z^{a_{j_i}}, i = 1, \dots, 4 \quad (19)$$

式中:  $a$  分别取  $X_T, Y_T, S$  和  $Q$ ; 指数  $a_{j_i}$  表示各随机变量的性能值; 系数  $p_{a_{j_i}}$  为相应的概率值。

根据式(18)和式(19)构造失效单元抗力生成函数用来描述各失效单元的性能状态分布:

$$U_i(z) = \otimes_{\omega} (U_{X_T}(z), U_{Y_T}(z), U_S(z)) = \sum_{j_1=1}^{M_1} \sum_{j_2=1}^{M_2} \sum_{j_3=1}^{M_3} p_{X_{Tj_1}} p_{Y_{Tj_2}} p_{S_{j_3}} z^{\omega(X_{Tj_1}, Y_{Tj_2}, S_{j_3})} = \sum_{k=1}^{k_i} p_{ik} z^{d_{ik}} \quad (20)$$

式中: 性能结构函数  $\omega(X_{Tj_1}, Y_{Tj_2}, S_{j_3}) =$

$$\sqrt{\frac{(X_{Tj_1})^2 (Y_{Tj_2})^2 (S_{j_3})^2}{(Y_{Tj_2})^2 (S_{j_3})^2 (a_1^2 - a_1 a_2) + (X_{Tj_1})^2 (S_{j_3})^2 a_2^2 + (X_{Tj_1})^2 (Y_{Tj_2})^2 a_3^2}}$$

指数  $d_{ik}$  表示各抗力性能值; 系数  $p_{ik}$  为相应的概率值,  $i = 1, 2, \dots, n$ 。

对各失效单元抗力生成函数进行合并同类项和 K-means 聚类操作, 得缩减后的各失效单元抗力生成函数为

$$\tilde{U}_i(z) = \otimes_{\omega} (U_{X_T}(z), U_{Y_T}(z), U_S(z)) = \sum_{k=1}^K p_{ik} z^{d_{ik}} \quad (21)$$

通过定义复合算子  $\otimes_{\omega}$  对缩减后的各失效单元的抗力生成函数进行复合运算, 得结构系统抗力生成函数

$$U_c(z) = \otimes_{\omega} (\tilde{U}_1(z), \dots, \tilde{U}_n(z)) = \sum_{i=1}^K p_i z^{D_i} \quad (22)$$

式中:在失效单元抗力生成函数复合运算的过程中,需对失效单元抗力生成函数依次实时地进行  $n-1$  次 K-means 聚类;指数  $D_i$  表示最薄弱失效单元所能承受的抗力;系数  $p_i$  表示相应的概率值。

性能结构函数  $\pi$  可表示为

$$\pi(d_{1k}, \dots, d_{nk}) = \min(d_{1k}, \dots, d_{nk}) \quad (23)$$

根据式 (12),对结构系统抗力生成函数和载荷生成函数进行复合运算,得随机载荷作用下的层合板可靠度。

## 5 算例分析

### 5.1 算例 1

已知一铺设角为  $45^\circ$  的碳/环氧树脂单层板,受面内拉伸载荷  $Q$  作用,面内尺寸为  $(20 \times 12.5)$   $\text{cm}^2$ ,单层板厚度为  $1$   $\text{mm}$ ,单层板的弹性常数:  $E_1 = 181$   $\text{GPa}$ ,  $E_2 = 10.7$   $\text{GPa}$ ,  $\nu_{21} = 0.28$ ,  $G_{12} = 7.17$   $\text{GPa}$ 。载荷及强度参数如表 1 所示。

表 1 随机变量统计特征

变量	均值	标准差	分布
$Q/(\text{kN/m})$	50	5.0	正态分布
$X_T/\text{MPa}$	1 535	422.2	对数正态分布
$Y_T/\text{MPa}$	42	11.5	对数正态分布
$S/\text{MPa}$	65	22.0	对数正态分布

采用生成函数法求解单层板的可靠度,首先基于 Tsai-Hill 强度理论构建性能结构函数,然后对各强度生成函数进行复合运算,得到失效单元的抗力生成函数,最后通过与载荷生成函数的复合运算得到可靠度结果。生成函数法与一次二阶矩法 (FOSM 法)<sup>[14]</sup>、JC 法<sup>[14]</sup>和蒙特卡罗法 (MC 法)<sup>[14]</sup>(仿真 100 万次),计算结果比较列于表 2。

表 3 载荷  $Q$  的正态分布

$Q/(\text{kN/m})$	正态分布											
150	108.75	116.25	123.75	131.25	138.75	146.25	153.75	161.25	168.75	176.25	183.75	191.25
	0.004 5	0.015 9	0.043 1	0.091 3	0.150 6	0.193 3	0.19 33	0.150 6	0.091 3	0.043 1	0.015 9	0.004 5

表 4 纵向拉伸强度  $X_T$  的对数正态分布

$X_T/\text{MPa}$	对数正态分布											
1 535	374	585.1	796.2	1 007.3	1 218.4	1 429.5	1 640.6	1 851.6	2 062.7	2 273.8	2 485	2 696
	0.000 2	0.001 4	0.028	0.11	0.2	0.22	0.18	0.12	0.071	0.039	0.02	0.01

表 5 横向拉伸强度  $Y_T$  的对数正态分布

$Y_T/\text{MPa}$	对数正态分布											
42	10.29	16.06	21.82	27.59	33.35	39.12	44.88	50.65	56.41	62.18	67.94	73.71
	0.000 002	0.0015	0.029	0.11	0.2	0.22	0.18	0.12	0.07	0.04	0.02	0.01

表 6 剪切强度  $S$  的对数正态分布

$S/\text{MPa}$	对数正态分布											
65	4.5	15.5	26.5	37.5	48.5	59.5	70.5	81.5	92.5	103.5	114.5	125.5
	0.000 002	0.000 1	0.02	0.11	0.21	0.22	0.17	0.11	0.07	0.04	0.02	0.01

表 2 算例 1 可靠度计算结果

方法	可靠度	相对误差/(%)	运算时间/s
FOSM 法	0.980 8	13.70	0.019 2
JC 法	0.900 2	2.30	0.098 8
生成函数法	0.872 1	0.69	1.367 0
MC 法	0.870 5	0	136.850 0

由表 2 可知,生成函数法与 JC 法和 FOSM 法结果相比,具有较高的可靠度计算精度。

### 5.2 算例 2

图 1 为一四周简支的 8 层对称正交铺设碳/环氧树脂层合板,受面内拉伸载荷  $Q$  的作用, $Q$  服从正态分布, $Q \sim N(150, 15^2)$  ( $\text{kN/m}$ ),层合板的铺层角度为  $(0^\circ/45^\circ) \sim (45^\circ/90^\circ)$ ,面内尺寸为  $a \times b = (20 \times 12.5)$   $\text{cm}^2$ ,层合板的总厚度为  $t$ ,即  $8 \times 0.125 = 1$   $\text{mm}$ 。其余强度参数与算例 1 一致。

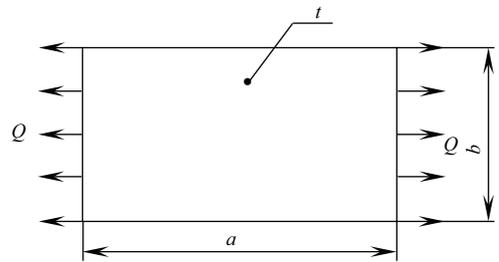


图 1 层合板的加载及铺层示意图

1) 对各随机变量进行离散化<sup>[15]</sup>,各随机变量的离散数据如表 3-表 6 所示。根据各表中的数据构造各随机变量的生成函数。

$$U_{X_T}(z) = \sum_{j_1=1}^{12} p_{X_{Tj_1}} z^{X_{Tj_1}}$$

$$U_{Y_T}(z) = \sum_{j_2=1}^{12} p_{Y_{Tj_2}} z^{Y_{Tj_2}}$$

$$U_S(z) = \sum_{j_3=1}^{12} p_{S_{j_3}} z^{S_{j_3}}$$

$$U_Q(z) = \sum_{j_4=1}^{12} p_{Q_{j_4}} z^{Q_{j_4}}$$

2) 由式(20),通过性能结构函数 $\omega$ 对各强度生成函数进行复合运算,各失效单元抗力生成函数的状态组合数,经合并同类项和K-means聚类操作后变化情况,如表7所示。

表7 状态组合数

失效单元序号	状态组合数	合并同类项	K-means 聚类
1	1 728	142	20
2	1 728	1 686	20
3	1 728	1 686	20
4	1 728	144	20
5	1 728	144	20
6	1 728	1 686	20
7	1 728	1 686	20
8	1 728	142	20

根据表7和式(21),构造各失效单元抗力生成函数

$$\tilde{U}_i(z) = \otimes_{\omega} (U_{X_T}(z), U_{Y_T}(z), U_S(z)) = \sum_{k=1}^{20} p_{ik} z^{d_{ik}}, i=1, \dots, 8$$

3) 根据式(21),得缩减后的各失效单元抗力生成函数,通过式(23)中的性能结构函数 $\pi$ ,根据式(22),对缩减后的各失效单元抗力生成函数进行复合运算,得结构系统的抗力生成函数:

$$U_C(z) = \otimes_{\pi} (\tilde{U}_1(z), \dots, \tilde{U}_8(z)) = \sum_{i=1}^{20} p_i z^{D_i}$$

在8个失效单元抗力生成函数进行复合运算的过程中,需对失效单元抗力生成函数依次实时地进行7次K-means聚类。

4) 根据式(12),对结构系统抗力生成函数 $U_C(z)$ 和载荷生成函数 $U_Q(z)$ 进行复合运算,得随机载荷 $Q$ 作用下的层合板可靠度。计算结果如表8所示。

表8 算例2可靠度计算结果

方法	可靠度	相对误差/(%)
生成函数法	0.967 2	0.58
MC法	0.972 8	0.00

## 6 结语

1) 复合材料层合板可靠性分析的通用生成函数法,

根据层合板中的随机变量,构建相应的生成函数,利用复合算子性能实现相应生成函数的复合运算,实现了基于单层失效的层合板可靠性建模。

2) 本文采用的K-means聚类算法缩减了各失效单元抗力生成函数以及由各失效单元抗力生成函数构成结构系统抗力生成函数的状态组合数,在保证计算精度的同时也提高了运算效率。

3) 新方法适用于多变量非线性功能函数结构系统的可靠性分析,当随机变量中含有非正态变量时,该方法同样适用。该方法考虑了层合板中的失效单元之间因同一随机载荷源引起的失效相关性,为复合材料层合板宏观强度可靠性分析提供了新的解决思路。

### 参考文献:

- [1] USHAKOV I. A universal generating function[J]. Soviet Journal of Computer and Systems Sciences, 1986, 24(5): 118-129.
- [2] LISNIANSKI A, LEVITIN G. Multi-state system reliability[M]. [S.I]: World Scientific, 2003.
- [3] 周金宇, 谢里阳. 结构系统可靠性分析的发生函数法[J]. 中国科学(技术科学), 2010, 40(2): 177-185.
- [4] 高鹏, 谢里阳. 基于改进发生函数方法的多状态系统可靠性分析[J]. 航空学报, 2010, 31(5): 934-935.
- [5] 郭惠听, 戴娟, 程立志, 等. 应力-强度干涉的直方图模型及可靠度计算的发生函数法[J]. 中国机械工程, 2013, 24(15): 2041-2042.
- [6] MI J, LI Y F, LIU Y, et al. Belief universal generating function analysis of multi-state systems under epistemic uncertainty and common cause failures[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2015, 64(4): 1300-1309.
- [7] JAFARY B, FIONDELLA L. A universal generating function-based multi-state system performance model subject to correlated failures[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2016, 152(8): 16-27.
- [8] SRIRAMULA S, CHRYSANTHOPOULOS M K. Quantification of uncertainty modelling in stochastic analysis of FRP composites[J]. Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, 2009, 40(11): 1673-1684.
- [9] 沈观林, 胡更开, 刘彬. 复合材料力学[M]. 第2版. 北京: 清华大学出版社, 2006: 112-113.
- [10] CHIACHIO M, CHIACHIO J, RUS G. Reliability in composites a selective review and survey of current development[J]. Composites Part B, 2012, 43(3): 902-913.
- [11] 王千, 王成. K-means聚类算法研究综述[J]. 电子设计工程, 2012, 20(7): 21-24.
- [12] LEVITIN G. The universal generating function in reliability analysis and optimization[M]. London: Springer, 2005.
- [13] GUPTA A, JAIN P K, KUMAR D. A novel approach for part family formation using K-means algorithm[J]. Advances in Manufacturing, 2013, 1(3): 241-250.
- [14] 金峰. 结构可靠度计算[M]. 北京: 科学出版社, 2015.
- [15] 李朴义, 周金宇, 马元节. 结构可靠度计算的非均匀离散化发生函数法[J]. 机械科学与技术, 2016, 35(8): 1207-1212.

收稿日期:2018-08-13