DOI:10.19344/j.cnki.issn1671-5276.2020.03.020

B 样条曲面光滑拼接方法

黄吴戟,王志国

(南京航空航天大学 机电学院,江苏 南京 210016)

摘　要:传统 B 样条曲面拼接要求在拼接边界上节点矢量相同,导致使用范围受限。提出一种适用于节点矢量不必相同的曲面拼接方法,可在一张曲面因几何约束而发生形状改变后,其他与之相接的曲面自适应地做出变形调整,保证精度要求下的拼接边界 G^1 连续,并运用实例验证了多曲面拼接方法的有效性。

关键词:B 样条曲面;G^1 连续;光滑拼接

中图分类号:TP391.9　　**文献标志码**:B　　**文章编号**:1671-5276(2020)03-0071-04

Multi-surface Stitching Method

HUANG Wuji, WANG Zhiguo

(College of Mechanic and Electronic Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: Traditional B-spline surface stitching needs the same node vector on the splicing boundary, thus limiting the useful range. This paper proposes a surface splicing method which has no need for the same node vectors. After a shape changes according to the geometric constraints, other curved surfaces neighbored can be adaptively adjusted to ensure G^1 continuity at the boundary, and the effectiveness of the multi-surface stitching method is verified by an example.

Keywords: B-spline surface; G^1 continuity; smooth stitching

0　引言

飞机、船舶、车辆的外形非常复杂,需要由大量曲面片拼接而成。无论是从美学设计角度考虑,还是从满足流体力学性能以减小阻力的角度来说,这些产品的外形数模往往由大量曲面碎片光滑拼接而成。从产品的初步模型直至得到最终模型的过程中,往往伴随着设计人员大量的时间与精力的投入,以期产品模型满足相关设计需求。可见,高效实用的曲面变形方法对设计过程的效率提升是不言而喻的,更能从中获得可观的经济效益。而这些产品模型的曲面变形设计方法是产品设计过程不可缺少的一项技术。

20 世纪 80 年代,BARR[1] 率先对曲面的变形以几何的形式做出描述,随后,WATT A[2] 等学者对 BARR 的变形手段做出了进一步完善与发展。1986 年,学者 SEDERBERG T W[3] 给出了一种著名的自由变形方法,即 FFD 技术。王小平等提出了一种基于多项式幂基因子的参数曲线曲面变形手段[4],该变形手段计算量不大,且不被几何描述局限,其核心思想是通过仿射变换矩阵作用于曲线曲面的参数方程上,非常简明,但变换后的几何形状无法用 STEP 标准表达,因此适用范围不广。于超升[5] 通过刚架模型利用有限元方法实现曲面变形,该方法避免了几何约束方程的建立,对于曲面拼接有实用性。崔洺瑞[6] 等利用曲率信息延拓曲面实现了对曲面上孔洞的填补。目前,国内外曲面变形研究的成果主要集中在对单张曲面进行变形与调整的效果上。然而用单张参数曲面去表达复杂的产品外形过于勉强,实际产品模型往往是使用多张曲面进行光滑拼接而成。设计人员在编辑模型形状的过程中对其中一张曲面施加变形约束后,与其相邻的曲面片必须随之做出变形调整,才能保持模型外观的光滑光顺。因此若能设计出一种能够在某张曲面发生约束变形后,其他曲面自适应地做出变形调整以满足连续性的方法将能极大地提高工程人员的设计效率。

过于严格的光滑拼接要求本身并非必要。在工程实践中,当曲面边界的拼接误差在一个可接受的精度要求范围内时,即可认为两张曲面已达到光滑拼接效果,且一般保证拼接边界的 G^1 连续性即可满足绝大多数产品的设计要求。这种允许一定误差的曲面变形技术属于容限造型的范畴,事实上很多几何造型平台均支持容限造型技术。

本文基于 CAD/CAM 行业的一般理论,提出了一种具有可控误差且保持 G^1 连续的多曲面变形技术,对施加外在约束后的多曲面满足 G^1 连续的协调变形提出了行之有效的算法,摆脱了边界节点矢量必须相同的限制,更具一般性,有重要的学术意义和工程应用价值。最后,以实例验证了本文方法的有效性与正确性。

1　B 样条曲面连续性条件

如图 1 所示,假设有两张 B 样条曲面 $\boldsymbol{P}^1(u,v)$,$\boldsymbol{P}^2(w,t)$,其控制顶点网格分别为 $\boldsymbol{S}^1_{i,j}(i=0,\cdots,m_1;j=0,$

第一作者简介:黄吴戟(1994 —),男,江苏苏州人,硕士研究生,研究方向为数字化设计与制造。

$\cdots,n_1)$ 与 $\boldsymbol{S}^2_{i,j}(i=0,\cdots,m_2;j=0,\cdots,n_2)$,曲面 $\boldsymbol{P}^1(u,v)$ 2 个参数的次数分别为 k_u 与 k_v。2 组节点矢量为 $\boldsymbol{U}=[u_0,u_1,\cdots,u_{m_1+k_u+1}]$, $\boldsymbol{V}=[v_0,v_1,\cdots,v_{n_1+k_v+1}]$。曲面 $\boldsymbol{P}^2(w,t)$ 的参数次数分别为 k_w 与 k_t。2 组节点矢量为$\boldsymbol{W}=[w_0,w_1,\cdots,w_{m_2+k_w+1}]$、$\boldsymbol{T}=[t_0,t_1,\cdots,t_{n_2+k_t+1}]$,则两张 B 样条曲面可以表示为:

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}^1(u,v)=\sum\limits_{i=0}^{m}\sum\limits_{j=0}^{n}\boldsymbol{S}^1_{i,j}N_{i,k_u}(u)\,N_{j,k_v}(v)\\ \boldsymbol{P}^2(w,t)=\sum\limits_{i=0}^{m}\sum\limits_{j=0}^{n}\boldsymbol{S}^2_{i,j}N_{i,k_w}(w)\,N_{j,k_t}(t)\end{cases}\tag{1}$$

将 4 组节点矢量两端均取相应次数加 1 的重节点个数并进行规范化处理,其余 2 组节点矢量 $\boldsymbol{W}$ 与 $\boldsymbol{T}$ 采取相同处理手段。

对于这样的两张 B 样条曲面,如果两者满足 G^0连续,则应满足如下约束条件:

$$\boldsymbol{P}^1(1,v)=\boldsymbol{P}^2(0,t)\tag{2}$$

式中存在 $v=v(t)$ 的参数映射关系。该等式的意义为曲面 $\boldsymbol{P}^1(u,v)$ 与曲面 $\boldsymbol{P}^2(w,t)$ 拥有共同的边界曲线。

如果两曲面在边界上满足 G^1 连续,则在满足上述 G^0 连续条件的前提下,还需满足

$$\alpha\boldsymbol{P}^1_u(1,v)+\beta\boldsymbol{P}^2_w(0,t)+\gamma\boldsymbol{P}^2_t(0,t)=0\tag{3}$$

对于式中参数有 $v=v(t)$,对于公共边界上的任意一点,都存在 1 组不全为 0 的常数 α、β、γ,使得上式成立。上述条件的本质是两曲面在整条公共边界线上的每一点都拥有共同的切平面,或拥有相同的法线。当约定切矢 $\boldsymbol{P}^1_u(1,v)$ 与切矢 $\boldsymbol{P}^2_w(0,t)$ 中,一个指向公共边界,另一个指向背离公共边界的方向时,则上式必须满足常数 α、β 异号,防止尖锐边界的出现。

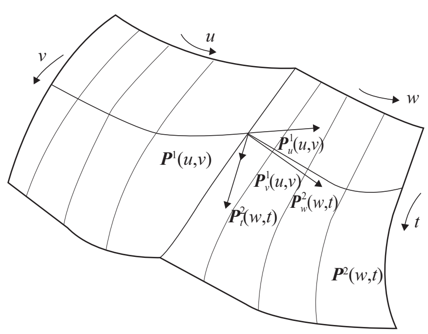

图 1 连续性条件示意图

2 曲面 G^0连续拼接

式(2)的 G^0连续条件为理论上的严格连续条件,根据此条件可给出离散拼接方法。

对曲面片之间的边界进行离散采样。首先需要确定合适的采样个数。众所周知,采样点越密集边界处几何信息越完整,但考虑到计算效率,应将采样点数目控制在合理范围。通常的采样方法为将定义域均分成若干份,参数点以相同的间隔进行取样。对于边界曲线 $\boldsymbol{P}^1(u,v)$,其规范化后的节点矢量为 $\boldsymbol{V}=[v_0,v_1,\cdots,v_{n_1+k_v+1}]$。

本文采取对每段定义域的中间参数以及定义域的两端点进行采样,以边界曲线 $\boldsymbol{P}^1(1,v)$ 为例,则采样参数序列 $\boldsymbol{Q}$ 为:

$$\boldsymbol{Q}=\{q_0,q_1,\cdots,q_{p-1},q_p\}\tag{4}$$

其中每个节点的值为:

$$\begin{cases}q_0=v_{k_u}\\ q_l=\dfrac{v_{k_u}+v_{k_u+1}}{2}\qquad(l=1,2,\cdots,p-1)\\ q_p=v_{n_1+1}\end{cases}\tag{5}$$

该采样个数确保了边界曲线的每个分段都有采样点。同时定义域两端点也进行采样,确保了边界曲线的起点与终点位置严格约束。

对于待调整曲面边界 $\boldsymbol{P}^1(0,v)$,其边界曲线的形状由控制顶点 $\boldsymbol{S}_{m0},\boldsymbol{S}_{m1},\cdots,\boldsymbol{S}_{mj},\cdots,\boldsymbol{S}_{mn}$ 以及节点矢量 $\boldsymbol{V}$ 决定。由于 $\boldsymbol{U}$ 的重节点的设置,当参数 $u=1$ 时,B 样条基函数 $N_m(u)=1$,此时,曲面的 B 样条基函数向量的分量 $\boldsymbol{N}_{m,j}(u,v)=N_j(v)$。通过在待调整曲面边界曲线上的相应离散点的参数信息 $q_l(l=0,1,\cdots,p)$,可确定一组曲面上的参数采样点组 $[1,q_l](l=0,1,\cdots,p)$,再根据目标边界 $\boldsymbol{P}^2(0,t)$ 上映射点的位置信息 $\boldsymbol{C}(\bar{q}_l)$,则可以在待调整曲面的边界曲线上构建采样点约束方程组。由于 $\boldsymbol{U}$ 的两端重节点设置,当参数 $u=1$ 时,u 向 B 样条基函数 $N_m(u)=1$,此时,待调整曲面 $\boldsymbol{P}^1(u,v)$ 的 B 样条基函数向量 $\boldsymbol{N}(u,v)$ 的分量 $\boldsymbol{N}_{m,j}(u,v)=N_j(v)$,记曲面 $\boldsymbol{P}^1(u,v)$ 的第 m 行控制顶点序列 $\boldsymbol{S}_{mj}(j=0,1,\cdots,n)$ 为 $\boldsymbol{S}'_j$。则方程组可以写为:

$$\begin{bmatrix}N_0(q_0)\cdots N_j(q_0)\cdots N_n(q_0)\\ \vdots\quad\vdots\quad\vdots\\ N_0(q_l)\cdots N_j(q_l)\cdots N_n(q_l)\\ \vdots\quad\vdots\quad\vdots\\ N_0(q_p)\cdots N_j(q_p)\cdots N_n(q_p)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S'_0\\ \vdots\\ S'_j\\ \vdots\\ S'_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}(\bar{q}_0)\\ \vdots\\ \boldsymbol{C}(\bar{q}_l)\\ \vdots\\ \boldsymbol{C}(\bar{q}_p)\end{bmatrix}\tag{6}$$

其中 $N_j(v)$ 为第 j 个由节点矢量 $\boldsymbol{V}=[v_0,v_1,\cdots,v_{n_1+k_v+1}]$ 所决定的参数 v 向 B 样条基函数。由于上述采样方法确保了参数点数量小于边界待调整控制顶点数,故该方程组为欠约束方程组,有多解,可以用优化的方法获得最优解。

本文的优化目标为曲面片边界处的形状尽量相似。运用文献[7]的思想,目标函数为:

$$f=\sum_{l=0}^{p}\boldsymbol{P}_v(q_j)\times\boldsymbol{C}_t(\bar{q}_j)^2=\sum_{l=0}^{p}\sum_{j=0}^{n}\boldsymbol{S}'_jN'_j(q_l)\times\boldsymbol{C}_t(\bar{q}_l)^2=\min\tag{7}$$

其中:$\boldsymbol{P}_v(q_j)$ 为待调整边界上参数采样点处沿曲线的切矢,是未知量;$\boldsymbol{C}_t(\bar{q}_j)$ 为目标边界映射点处沿曲线的切矢,是已知量;$\boldsymbol{S}'_j$ 为待调整边界控制顶点,待求解;N'_j 为 v 参数方向的 B 样条基函数。

该函数的思想是曲面片边界上 $\boldsymbol{P}_v(q_l)$ 与 $\boldsymbol{C}_t(\bar{q}_l)$ 的叉乘平方和最小,$\boldsymbol{P}_v(q_l)$ 与 $\boldsymbol{C}_t(\bar{q}_l)$ 叉乘的模包含了夹角的正弦函数值,反映了两个矢量的夹角大小。在某种意义

上，离散点处两切矢的夹角越小，它们的形状越接近。

对于此类带约束问题，运用文献［8］的思想，可采用 Langrange 乘数法求解，相应的 Langrange 方程为：

$$L = \sum_{l=0}^{p} \boldsymbol{P}_v(q_j) \times \boldsymbol{C}_t(\bar{q}_j)^2 +$$

$$\sum_{l=0}^{p} \lambda_p \left[\sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{S}_j' N_j(q_l) - \boldsymbol{C}_t(\bar{q}_l) \right] \tag{8}$$

求方程对各个 Langrange 乘子与控制顶点各分量的偏导并令其 $=0$，即可获得一组有唯一解的线性方程组。从而获得优化的 G^0 拼接解。

3 曲面 G^1 连续拼接

对于曲面 $\boldsymbol{P}^1(u,v)$ 上参数 $u=1$ 所对应边界上的跨界切矢，可以通过计算 $\boldsymbol{P}_u^1(1,v)$ 获得。由准均匀 B 样条曲面性质可以推知，边界上每个点的跨界切矢最多依赖于曲面控制顶点网格上 8 个顶点的位置，由于曲面边界上单点的跨界切矢表达不简明，为此，利用等参线控制顶点进行跨界切矢的表示，进而通过改动等参线控制顶点的位置对曲面做出调整变形。

等参线是曲面上某个参数相等的所有点组成的一条曲线。假设待调整曲面上参数采样点为 $q_l, l=0,1,\cdots,p$，映射到目标曲面边界点的参数序列为 $\bar{q}_l$，每个点都对应曲面上 $v=q_l$ 的一条等参线。根据张量积曲面的性质，该等参线也可以像 B 样条曲线一样表达成由一组控制顶点所决定的曲线。由此可得到等参线 $v=q_l$ 的 B 样条曲线表达为

$$\bar{\boldsymbol{P}}(u) = \sum_{i=0}^{m} \bar{\boldsymbol{S}}_i N_i(u) \tag{9}$$

其中等参线控制顶点 $\bar{\boldsymbol{S}}_i$ 则在曲面中一行控制顶点及相应节点矢量所组成的 B 样条曲线上，如图 2 所示，通过代入参数 $v=q_l$ 获得，即

$$\bar{\boldsymbol{S}}_i = \sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{S}_{ij} N_j(q_l), \quad i = 0,1,\cdots,m \tag{10}$$

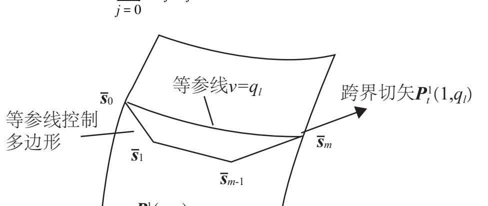

图 2　等参线控制顶点示意图

由于边界曲线具有 Bézier 端点性质，根据计算可知，如果节点矢量 $\boldsymbol{U}$ 的内节点均匀分布，则在 $u=1$ 处的切矢为

$$\bar{\boldsymbol{P}}_u(1) = k(m+1-k)(\bar{\boldsymbol{S}}_m - \bar{\boldsymbol{S}}_{m-1}) \tag{11}$$

由式(11)可知，等参线在端点 $u=1$ 的切矢方向与最后两个等参线控制顶点 $\bar{\boldsymbol{S}}_m$、$\bar{\boldsymbol{S}}_{m-1}$ 的连线方向一致。

对于待调整曲面而言，其 u 向等参线 $v=q_l$ 在端点 $u=1$ 处的切矢，即为曲面边界上的点 $\boldsymbol{P}(1,q_l)$ 的跨界切矢，使待调整曲面能够与已调整曲面 G^0 连续，必须满足三切矢共面原则，即切矢 $\boldsymbol{C}_w(0,\bar{q}_l)$、$\boldsymbol{C}_t(0,\bar{q}_l)$、$\boldsymbol{P}_u(1,q_l)$ 三者共面。显然，如果满足条件

$$\boldsymbol{P}_u(1,q_l) = \boldsymbol{C}_w(0,\bar{q}_l) \tag{12}$$

则曲面必然可以在这点处满足三切矢共面，这是曲面 C^1 连续的条件，自然也能够保证 G^1 连续，且求解条件明晰，方便列出方程组求解。经检验，该方法对曲面变形的调整量较大，且随着节点插入算法的执行，同一点切矢量的值会发生改变，从而等式条件也会发生改变，因此本文不采用 C^1 连续的条件，寻找更优化的满足 G^1 连续的曲面变形调整方案。

由于前两个为已调整曲面给出的采样点约束，是确定值，因此需要调整 $\boldsymbol{P}_u(1,q_l)$ 为 $\boldsymbol{P}_u'(1,q_l)$，使之处于 $\boldsymbol{C}_w(0,\bar{q}_l)$、$\boldsymbol{C}_t(0,\bar{q}_l)$ 所构成的平面上。假设调整量为 $\Delta\boldsymbol{P}_u(1,q_l)$，则

$$\Delta\boldsymbol{P}_u(1,q_l) = \boldsymbol{P}_u'(1,q_l) - \boldsymbol{P}_u(1,q_l) \tag{13}$$

本文基于垂直投影的方法，将 $\boldsymbol{P}_u(1,q_l)$ 垂直投影于 $\boldsymbol{C}_w(0,\bar{q}_l)$、$\boldsymbol{C}_t(0,\bar{q}_l)$ 所构成的平面即获得 $\boldsymbol{P}_u'(1,q_l)$，这种方法可以保证调整量 $|\Delta\boldsymbol{P}_u(1,q_l)| = \min$。其获得方法如图 3 所示。

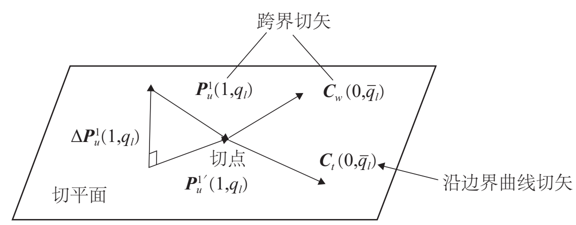

图 3　跨界切矢调整量

经计算，其调整量 $\Delta\bar{\boldsymbol{S}}_{m-1}$ 为

$$\left[(\bar{\boldsymbol{S}}_m - \bar{\boldsymbol{S}}_{m-1}) \cdot \frac{\boldsymbol{C}_w(0,\bar{q}_l) \times \boldsymbol{C}_t(0,\bar{q}_l)}{\boldsymbol{C}_w(0,\bar{q}_l) \times C_t(0,\bar{q}_l)} \right] \frac{\boldsymbol{C}_w(0,\bar{q}_l) \times \boldsymbol{C}_t(0,\bar{q}_l)}{\boldsymbol{C}_w(0,\bar{q}_l) \times \boldsymbol{C}_t(0,\bar{q}_l)} \tag{14}$$

对于所有采样点 $q_l (l=0,1,\cdots,p)$ 均一一对应 $\Delta\bar{\boldsymbol{S}}_{m-1}$ 量，可以写成 $\Delta\bar{\boldsymbol{S}}_{m-1}(q_l)$。这些值对应的等参线控制顶点的位置由待调整曲面第 $m-1$ 行控制顶点 $\boldsymbol{S}_{m-1j}$ $(j=0,1,\cdots,n)$ 决定，因此可将 G^1 连续对切矢的调整要求转化为多点约束问题。据此构建如下方程组：

$$\begin{bmatrix} N_0(q_0) \cdots N_n(q_0) \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ N_0(q_l) \cdots N_n(q_l) \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ N_0(q_p) \cdots N_n(q_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{S}_{m-10} \\ \vdots \\ \Delta\boldsymbol{S}_{m-1j} \\ \vdots \\ \Delta\boldsymbol{S}_{m-1n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\bar{\boldsymbol{S}}_{m-1}(\bar{q}_0) \\ \vdots \\ \Delta\bar{\boldsymbol{S}}_{m-1}(\bar{q}_l) \\ \vdots \\ \Delta\bar{\boldsymbol{S}}_{m-1}(\bar{q}_p) \end{bmatrix} \tag{15}$$

其中 $\Delta\boldsymbol{S}_{m-1j}(j=0,1,\cdots,n)$ 为待调整曲面第 $m-1$ 行控制顶点的调整量，是待求解量；N_j 为 v 参数方向的 B 样条基函数。该方程组为欠约束方程，存在多解，可通过优化的方法获取最优解。

在保证 G^1 连续的协调变形中，待调整曲面形状的改

变是不可避免的,基于最小二乘优化原理,优化目标为变形后的控制顶点调整量的平方和最小,因此构建如下目标优化函数:

$$\sum_{j=0}^{n}(\Delta S_{m-1j})^2=\min \tag{16}$$

这是一个带约束的优化问题,同样采用 Langrange 乘数法,可构建 Langrange 方程

$$L=\sum_{j=0}^{n}(\Delta S_{m-1j})^2+\sum_{l=0}^{p}\lambda_p\left[\sum_{j=0}^{n}\Delta S_{m-1j}N_j(q_l)-\Delta\bar{S}_{m-1}(\bar{q}_l)\right] \tag{17}$$

求方程对各个 Langrange 乘子与控制顶点各分量的偏导并令其=0,即可获得一组有唯一解的线性方程组,从而获得优化的 G^0 拼接解。

4 实例验证

如图4所示,展示了汽车引擎前盖板曲面模型以及在前盖板中间轴线上设置的4个点约束,图5所示为曲面模型变形后的效果。

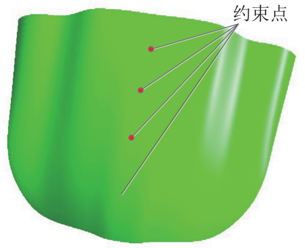

图4 汽车前盖板曲面模型及多点几何约束

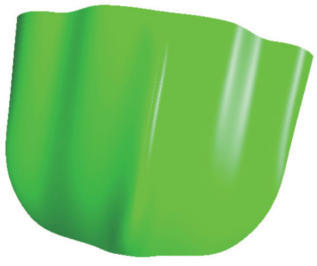

图5 变形后曲面模型

初始汽车前盖板由两片曲面拼接而成,拼接边界为模型中轴线位置,对右半张车前盖曲面边界施加图4所示的4个离散点约束,从而使右半张曲面在靠近中轴线的边界处产生变形,经由本文提出的曲面拼接方法,左半边模型的曲面相应做出变形调整,保证两片车前盖曲面继续保持光滑拼接,最终产生了图5所示的车前盖凸起造型。因此本文多曲面光滑拼接方法的准确性得到了有效的验证。

5 结语

本文运用连续性条件,将曲面拼接分为满足 G^0 条件与 G^1 条件两步分别对曲面进行变形调整,通过将边界连续条件离散化,建立起欠约束方程组,并选取合适的优化目标,对曲面边界处的两排控制顶点做出位置调整,从而实现光滑拼接的效果,通过实例验证,可有效保证曲面的光滑拼接效果。

参考文献:

[1] BARR, ALAN H. Global and local deformations of solid primitives[J]. ACM SIGGRAPH Computer Graphics, 1984, 18(3): 21-30.

[2] WATT A, WATT M. Advanced animation and rendering techniques: theory and practice[M]. Boston: Addison-Wesley, 1991.

[3] SEDERBERG T W, PARRY S R. Free-form deformation of solid geometric models[J]. ACM SIGGRAPH Computer Graphics, 1986, 20(4):151-153.

[4] 王小平,叶正麟,孟雅琴,等. 基于伸缩因子的参数曲线自由变形[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2002,14(1):66-69.

[5] 于超升. 基于刚架模型的复杂多曲面光滑协调变形算法研究[D]. 南京:南京航空航天大学,2012.

[6] 崔洺瑞,安鲁陵,卫炜,等. 一种复杂曲面延拓方法[J]. 机械制造与自动化, 2017,46(6):31-34.

[7] 孙利君,张彩明,刘宁. 用导矢叉乘法对 NURBS 曲线进行形状调整[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2003, 15(5): 527-531.

[8] 王志国. 曲线曲面形状修改和变形关键技术研究[D]. 南京:南京航空航天大学,2006.

收稿日期:2019-01-21