

# RAT 矩函数在模态振形数据去噪中的应用

张浩,臧朝平

(南京航空航天大学 能源与动力学院,江苏 南京 210016)

**摘 要:**提出将 RAT 矩函数应用于三维结构模态振型数据去噪的方法,使用 RAT 矩函数对结构的振型数据进行矩变换,从振型数据中提取出包含所有振型信息的特征矩集,将幅值较小的矩值作为噪声从特征矩集中剔除,再利用特征矩集重构振型图像,即能实现对振型数据去噪。采用一个仿真的机匣结构,以正态分布的随机噪声模拟真实情况下的噪声,在不同噪声强度下利用 RAT 矩对振型数据去噪,来验证 RAT 矩函数的去噪能力。结果表明:RAT 矩函数具有良好的抗噪性,能大幅度减小噪声对模态振型的影响。

**关键词:**RAT 矩函数;抗噪性;模态振型;仿真测试

**中图分类号:**V231;TP391.9 **文献标识码:**A **文章编号:**1671-5276(2021)01-0099-03

## Denoising Application of RAT Moment Function to Modal Shape Data

ZHANG Hao, ZANG Chaoping

(College of Energy and Power, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract:** RAT moment function was proposed to denoise the modal shape data of a three-dimensional structure. The RAT moment function was adopted to extract feature moment sets, which contained the vibration information of the structure. Then small moments were removed as noise from the feature moment set. Using the feature moment set to reconstruct the mode shape image, the mode data could be denoised. Taking a finite element model as an example, the noise under actual conditions was simulated with randomly distributed noise. Under different noise intensities, RAT moment was applied to denoise mode shape data, which verified the denoising capability of RAT moments. The results show that the RAT moments are of good noise resistance and able to reduce noise substantially.

**Keywords:** RAT moment; noise resistance; mode shape; simulation test

## 0 引言

矩函数数据去噪是最常用的形状特征提取方法,最初矩函数主要应用在图像识别领域。随着研究的深入,在结构动力学领域矩函数也得到了广泛的应用。图像处理中最常用的矩函数为 TEAGUE M R<sup>[1]</sup> 提出的 Zernike 矩和 Legendre 矩两个具有正交性的二维矩函数,可以解决几何矩造成信息冗余的问题。但由于上述矩函数为连续函数,因此在计算时使用离散求和的方式,这样不可避免地带来很大的计算误差。随后 MUKUNDAN R<sup>[2]</sup> 提出了一个离散的矩函数,即 Tchebichef 矩函数。Tchebichef 矩要优于 Zernike 矩与 Legendre 矩。因为 Tchebichef 矩是离散的正交矩,不仅能够避免数据的冗余,还能消除连续积分离散化带来的误差。

基于矩函数能够压缩振型数据并反映结构的振动信息,王耀明<sup>[3]</sup>最早将 Tchebichef 矩函数引用在动力学模型确认中,并完成了对二维矩形、圆形结构的振型描述。但是二维矩函数在处理三维结构时只能使用投影等降维的方式,这样不仅操作复杂,还会造成几何信息的缺失。为

了解决这个问题,曾亚未等<sup>[4]</sup>构建了三维的径向向 Tchebichef 矩函数(RAT 矩)。但是由于 RAT 矩函数是定义在柱坐标下的矩函数,其只能够描述三维圆柱结构的模态振型。

在工程中大多数航空发动机部件为变截面的曲面结构,马健等<sup>[5]</sup>采用径向坐标  $r$  的多项式去拟合轴向坐标  $z$  的方法,从而实现描述简单的三维曲面机匣的模态振型,但该方法不具有通用性。本文作者采用积分的思想,将曲面机匣当作由若干圆柱机匣积累而成,并将振型数据插值到一个圈数 $\times$ 点数 $\times$ 层数的像素空间内。这样就可以使用 RAT 矩函数直接描述三维曲面结构的模态振型<sup>[6]</sup>。

在工程实际中,如何保证测试数据的准确性一直都是需要研究的问题。在测试过程中会有很多因素影响测试结果的准确性,最常见的是试验过程中噪声的影响。若测试过程中存在很大的噪声,会导致试验数据准确性降低。基于 RAT 矩函数对曲面结构的振型描述能力,进一步研究了 RAT 矩函数在去噪中的应用。采用正态分布的随机噪声模拟实际噪声影响,分析了不同噪声强度下 RAT 矩函数的去噪能力,对将矩函数应用到工程试验的去噪过程有重要意义。

**基金项目:**国家自然科学基金项目(11372128)

**第一作者简介:**张浩(1996—),男,江西新余人,硕士研究生,研究方向为结构强度与振动。

# 1 RAT 矩函数的模态振型描述方法

## 1.1 矩变换

在描述三维结构的模态振型时,将每个节点的位移看作每个像素点的灰度值,将振型数据表示为  $I(x, y, z)$ , 每一个点  $(x, y, z)$  对应一个位移值  $I(x, y, z)$ 。从而利用三维矩函数能够实现对振型数据的矩变换,矩变换可表示为

$$\vartheta = \Gamma[I(x, y, z)] \quad (1)$$

式中:  $I(x, y, z)$  代表模态振型函数;  $\Gamma[*]$  表示对振型数据进行矩变换的过程,该过程可具体表示为

$$\vartheta = \int_{\Omega} \vartheta(x, y, z) I(x, y, z) dx dy dz \quad (2)$$

其中:  $\vartheta(x, y, z)$  表示三维矩函数,如本文使用的 Radial Axial Tchebichef 矩函数;  $\Omega$  为矩函数自变量的取值范围。

## 1.2 RAT 矩函数的振型描述

RAT 矩函数的表达式见如下:

$$R_{pq}^l = \frac{1}{np(p, m)p(l, h)} \sum_{z=0}^{h-1} \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} t_{l,h}(z) t_{p,m}(r) e^{-j\frac{2\pi qk}{n}} f(r, \theta_k, z) \quad (3)$$

其中:  $p = 0, 1, \dots, (N/2 - 1)$  表示径向的阶数;  $q = 0, 1, \dots, m - 1$  表示重数;  $l$  代表的是轴向的阶数,  $l = 0, 1, \dots, (N/2 - 1)$ ;  $r, k, z$  分别是径向坐标、周向坐标和轴向坐标;  $t_{l,h}(z)$  和  $t_{p,m}(r)$  分别表示轴向与径向的 Tchebichef 多项式,表达如下:

$$t_{l,h}(z) = \frac{l!}{(h)^l} \sum_{k=0}^l (-1)^{l-k} \begin{bmatrix} h-1-k \\ l-k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l+k \\ l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$t_{p,m}(r) = \frac{p!}{(m)^p} \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \begin{bmatrix} m-1-k \\ p-k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p+k \\ p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix} \quad (5)$$

对结构的振型图像进行矩变换,从而提取出特征矩集,该过程能够实现对庞大振型数据的压缩处理,特征矩集的表达式见式(6)。

$$R_{p,q}^l = \{R_{0,0}^0, R_{0,1}^0, R_{0,2}^0, \dots, R_{10}^1, R_{11}^1, R_{12}^1, \dots, R_{p,q}^l\} \quad (6)$$

## 1.3 基于特征矩集的重构

通过从振型数据中提取出的特征矩集能够重构振型图像,重构公式如下:

$$\hat{f}(r, \theta_k, z) = \sum_{p=0}^{p_{\max}} \sum_{q=0}^{q_{\max}} \sum_{l=0}^{l_{\max}} R_{pq}^l t_{p,m}(r) t_{l,h}(z) e^{j\frac{2\pi qk}{n}} = \sum_{l=0}^{l_{\max}} t_{l,h}(z) \left\{ C_{p_0}^l + 2 \sum_{q=1}^{q_{\max}/2} \left[ C_{pq}^l \cos \frac{2\pi qk}{m} + S_{pq}^l \sin \frac{2\pi qk}{m} \right] \right\} \quad (7)$$

引入一个总体相似度系数 ( $G_{sc}$ ) 的概念去评价重构振型与参考振型的相似程度,  $G_{sc}$  的表达如下:

$$s(I', I) = \frac{\iint_{\Omega} (I' - \bar{I}') (I - \bar{I}) dA}{\sqrt{\left[ \iint_{\Omega} (I' - \bar{I}')^2 dA \right] \left[ \iint_{\Omega} (I - \bar{I})^2 dA \right]}} \quad (8)$$

式中:  $\Omega$  代表振型数据的定义域范围;  $I'$  和  $I$  分别为重构的振型与原始的振型,另外:

$$\bar{I}' = \frac{\int_{\Omega} I' dA}{\int_{\Omega} dA}, \bar{I} = \frac{\int_{\Omega} I dA}{\int_{\Omega} dA} \quad (9)$$

$G_{sc}$  的定义如下:

$$G_{sc}(i) = \frac{S_{\text{mean},i}}{1 + S_{\text{var},i}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

$G_{sc}(i)$  代表 RAT 矩的阶次为  $i$  时的每一阶模态重构振型与原始振型的总体相似度系数;  $S_{\text{mean},i}$  与  $S_{\text{var},i}$  分别为每一阶模态的重构振型图像与原始振型图像相似度的均值与方差。  $G_{sc}$  的取值在 0~1 之间,数值越大则代表重构精度越高。

## 2 RAT 矩函数对仿真模型的振型描述与去噪分析

为了验证 RAT 矩函数对三维曲面机匣的模态振型描述能力与抗噪性,以一个三维曲面结构的有限元模型为例,材料采用 GH4169 高温合金,结构的弹性模量  $E$  为 204 GPa,密度为 8240 kg/m<sup>3</sup>,泊松比为 0.3。在 ANSA 中使用二阶四面体单元对机匣划分网格,共有 26195 个节点,12851 个单元。使用 Nastran 求解器对该模型进行模态计算,计算自由-自由状态下的前 10 阶模态。



图1 曲面机匣有限元模型

### 2.1 RAT 矩函数对的振型描述能力

建立的有限元模型见图1。将振型数据插值到一个圈数×点数×层数的三维像素空间内,构建其模态振型图。构建的前8阶模态振型图见图2。利用 RAT 矩函数对该有限元模型的振型数据进行矩变换,得到每一阶模态的特征矩集,每一阶的特征矩集见图3。利用提取出的 RAT 特征矩集可以对振型图像进行重构,重构振型图见图4。

观察原始振型图与利用 RAT 矩函数重构的振型图,可以看到重构振型图的精度非常高,与原始振型图基本一致,证明了 RAT 矩函数对三维曲面结构模态振型图的描述能力。

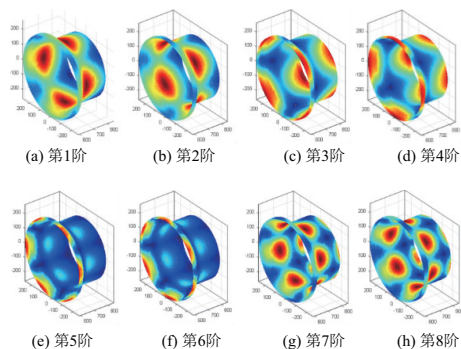


图2 有限元模型的前8阶模态振型

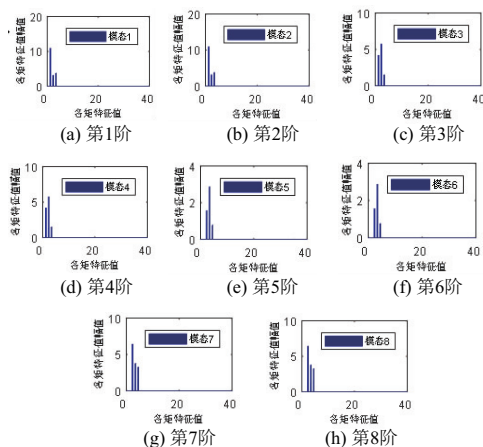


图3 每一阶的特征矩集幅值

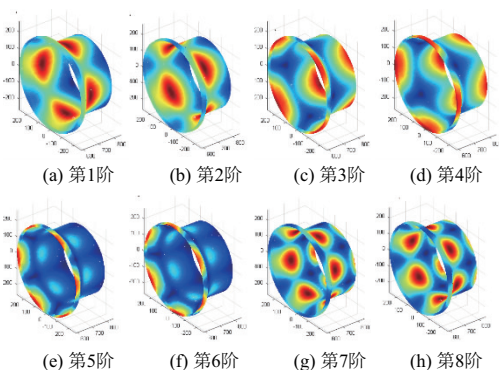
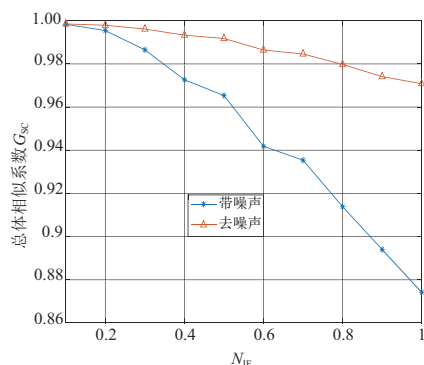


图4 前8阶模态重构振型图

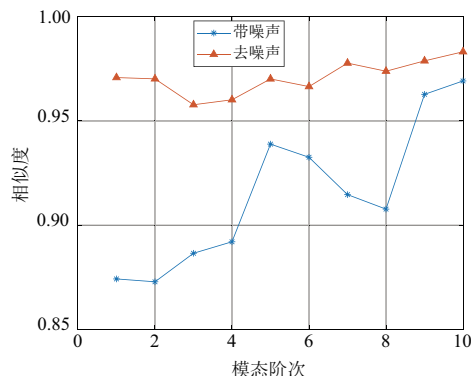
## 2.2 RAT 矩函数的去噪分析

在有限元模型的振型数据中加入正态分布的随机噪声,以达到一个模拟实际情况下噪声的效果。在此引入一个系数  $N_{IF}$  (noise intensity factor), 表示正态分布的随机噪声的强度,  $N_{IF}$  值为 0.5 代表强度为 50% 的随机噪声。再通过前文介绍的总体相似系数  $G_{SC}$  来表示基于 RAT 矩去噪后的振型图像与原始振型图像的相似度,从而评价 RAT 矩函数的抗噪效果。在  $N_{IF}$  值从 0.1~1 的情况下,分别计算出每一阶模态下加噪声的振型图像与原始振型图像的  $G_{SC}$  均值与基于 RAT 矩去噪后振型图像与原始振型图像的  $G_{SC}$  均值,将两条  $G_{SC}$  随  $N_{IF}$  值变化曲线绘制在同一张图中,见图 5。

图5 不同噪声强度下去噪前后的  $G_{SC}$  值

从图中可见,随着加入的噪声强度越来越大,带噪声的振型图像与原始图像的差别越来越大( $G_{SC}$  值越来越小),当  $N_{IF}$  为 1 也就是加入 100% 强度噪声时,带噪声的振型图像与原始图像的  $G_{SC}$  降低到了 0.87。而基于 RAT 矩去噪后的振型图像与原始图像的相似性虽然也随着  $N_{IF}$  值的增大而减小,但是减小的速率非常小,能保持一个稳定性。即使噪声强度  $N_{IF}$  为 1 的情况,去噪后振型图像的相似性  $G_{SC}$  也在 0.97 以上,可以证明 RAT 矩函数能很好地应用在去噪过程中。

再将  $N_{IF}$  为 1 情况下每一阶模态下带噪声与去噪声振型图像与原始图像的  $G_{SC}$  值进行对比,对比图见图 6。

图6  $N_{IF}$  为 1 时每阶模态去噪前后振型图的  $G_{SC}$ 

可以看到,当噪声强度为 100% 时,使用 RAT 矩去噪后振型图像的相似度始终保持在 0.95 以上,这也在验证了 RAT 矩函数的去噪能力,即使在噪声比较大的情况下,依旧能保证去噪后振型图与原始振型图有很高的相似度。

最后以第 8 阶模态的振型图像为例,在  $N_{IF}$  值为 0.2、0.5、1 的情况下,列出第 8 阶模态的原始振型图、加噪振型图与去噪后的振型图对比。 $N_{IF}$  为 0.2、0.5 和 1 时振型图像对比见图 7。

由图 7 可以看到,噪声强度系数  $N_{IF}$  值为 0.2 时去噪后的振型图和原始振型图无太大差别,去噪效果十分显著,  $N_{IF}$  值为 0.5 时去噪后振型图与原始图像的相似度相比于  $N_{IF}$  为 0.2 的情况要低一些,但通过振型图像对比可以看到去噪效果依旧很好。当  $N_{IF}$  值为 1 时,可以看到去噪后的振型图像与原始振型图像的相似度有所降低,但是仍具有良好的去噪效果。

(下转第 151 页)

- [6] TVERGAARD V, HUTCHINSON J W. Mode III effects on interface delamination[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2008, 56(1): 215-229.
- [7] SCHEIDER I, BROCKS W. Simulation of cup-cone fracture using the cohesive model[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2003, 70(14): 1943-1961.
- [8] NEEDLEMAN A. An analysis of decohesion along an imperfect interface[J]. International Journal of Fracture, 1990, 42(1): 21-40.
- [9] NEEDLEMAN A. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding[J]. Journal of Applied Mechanics, 1987, 54(3): 525-531.
- [10] 王晓强. 基于内聚力模型的复合材料拉伸性能细观有限元分析[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2012.
- [11] 靳国辉. 基于内聚力模型非均质材料损伤与失效的数值研究[D]. 杭州: 浙江工业大学, 2015.
- [12] 郭江, 董刚. 基于内聚力模型的沥青混凝土低温断裂模拟[J]. 佳木斯大学学报(自然科学版), 2016, 34(4): 517-519, 543.
- [13] 张军, 贾宏, 田阳. 粘接界面弹塑性内聚力模型子程序开发[J]. 郑州大学学报(工学版), 2014, 35(1): 77-80.
- [14] BERT C W, PAUL T K. Failure analysis of rotating disks[J]. International Journal of Solids and Structures, 1995, 32(8/9): 1307-1318.
- [15] SATO Y, NAGAI F. Influence of Coriolis' force on the burst of rotating disc of cast iron[M]. National Aerospace Laboratory, 1963.
- [16] SØRENSEN B F, JACOBSEN T K. Determination of cohesive laws by the J integral approach[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2003, 70(14): 1841-1858.
- [17] SAKATA M, AOKI S, KISHIMOTO K, et al. Crack growth and instable fracture of rotating disks[J]. Journal of Engineering Materials and Technology, 1985, 107(2): 154-160.
- [18] 夏恭忱, 石玉珍. 中国航空材料手册: 第1卷[M]. 北京: 中国标准出版社, 1988: 300-301.
- [19] TURON A, DÁVILA C G, CAMANHO P P, et al. An engineering solution for mesh size effects in the simulation of delamination using cohesive zone models[J]. Engineering Fracture Mechanics, 2007, 74(10): 1665-1682.
- [20] 航空发动机设计用材料数据手册编委会. 航空发动机设计用材料数据手册 第四册[M]. 北京: 航空工业出版社, 2010.

收稿日期: 2019-12-16

(上接第 101 页)

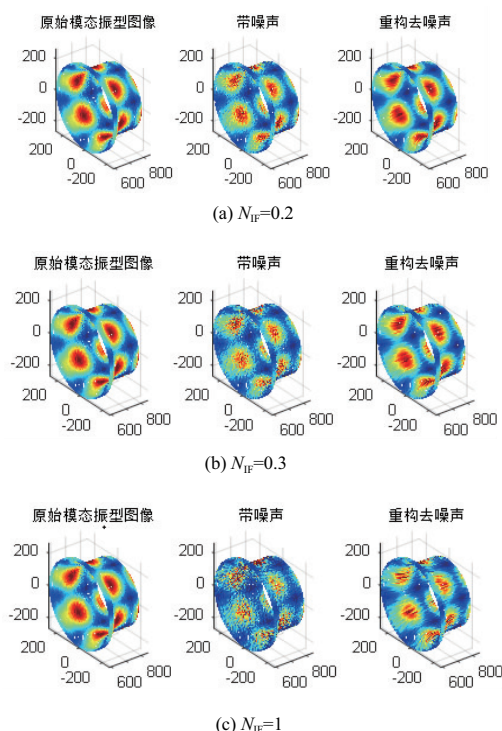


图7 不同噪声强度下第8阶模态去噪效果图

### 3 结语

本文研究了RAT矩函数对三维曲面结构的模态振型

描述能力,并且进一步研究了RAT矩函数的去噪效果,得到以下结论:

1) 证明了使用RAT矩函数能够精确地描述三维曲面结构的模态振型,对进一步将RAT矩用于三维曲面结构的模型修正有重要的意义。

2) 验证了RAT矩函数的去噪能力,结果显示在各个噪声强度下利用RAT矩函数重构模态振型的去噪效果都十分明显,若将其应用在工程中能有效地解决试验过程中噪声影响的问题,具有一定的工程意义。

#### 参考文献:

- [1] TEAGUE M R. Image analysis via the general theory of moments[J]. Journal of the Optical Society of America, 1980, 70(8): 920.
- [2] MUKUNDAN R, ONG S H, LEE P A. Image analysis by Tehebichef moments[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, 10(9): 1357-1364.
- [3] 王耀明. Tehebichef矩及其在图像重建中的应用[J]. 上海电机学院学报, 2007, 10(1): 42-44.
- [4] 曾亚未, 臧朝平, 王晓伟. 基于矩函数的某航空发动机机匣的振型描述及模型确认[C]//上海: 中国力学大会-2015论文集, 2015: 346.
- [5] 马健, 臧朝平. 轴对称结构模态振型的径轴向切比雪夫矩函数描述方法[J]. 噪声与振动控制, 2018, 38(增刊1): 138-142.
- [6] ZHANG Hao. Mode shape description of three demansional curved stucture by radial axial tchebichef moments[C]. Nanjing: The 7th International Academic Conference for Graduates, 2019.

收稿日期: 2019-12-20