

螺旋弹簧横向静刚度计算及动刚度频变分析

张名扬,张开林,姚远

(西南交通大学 牵引动力国家重点实验室,四川 成都 610031)

摘要:为探究等截面圆柱形螺旋压缩弹簧横向静刚度及动刚度特性,建立弹簧离散模型,进行有限元分析。静载下,修正 Krettek 刚度公式,使其兼顾弹簧受载端的垂向压缩量和横向位移量等因素对横向静刚度的影响。动载下,进行频变分析,绘制横向动刚度随激励频率变化曲线。结果表明:横向动刚度随激励频率的提高呈波动上升的趋势;可以通过改变横向激励的加载方向、垂向预压缩量和材料阻尼调整动刚度的变化规律。

关键词:圆柱螺旋弹簧;横向静刚度;横向动刚度;频变分析

中图分类号:TH135+.1 **文献标志码:**A **文章编号:**1671-5276(2021)03-0028-05

Lateral Static Stiffness Calculation and Dynamic Stiffness Frequency Variety Analysis of Helical Spring

ZHANG Mingyang, ZHANG Kailin, YAO Yuan

(State Key Laboratory of Traction Power, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract:To explore the lateral static stiffness and dynamic stiffness characteristics of cylindrical helical compression spring with equal cross section, a spring discrete model was established and the finite element calculation was carried out. Under static load, the Krettek stiffness formula was modified in consideration of the effect of vertical compression and lateral displacement on the lateral static stiffness of the loaded spring. Under dynamic load, the frequency variety analysis was carried out and the lateral dynamic stiffness changes with frequency curves were drawn. The results show that the lateral dynamic stiffness fluctuates with the increase of excitation frequency, and the dynamic stiffness can be adjusted by changing the loading direction, the vertical pre-compression and the damping.

Keywords: cylindrical helical spring; lateral static stiffness; lateral dynamic stiffness; frequency variety analysis

0 引言

等截面圆柱形螺旋压缩弹簧因结构简单可靠、变形范围宽泛等优点广泛应用于仪表、电器、交通运输等行业^[1-3]。在轨道交通领域,螺旋弹簧被大量应用在机车车辆的悬挂装置上,起缓和因轮对行径线路不平顺、轨缝、道岔、钢轨磨耗和不均匀下沉以及车轮不圆、轴颈偏心等原因引起的振动和冲击^[4]。螺旋弹簧的动态传递特性显著影响着列车运行的安全性、平稳性和舒适性,准确分析其刚度特性是保证动力学计算精度的前提。

轮轨冲击振动对列车运行速度十分敏感。列车在高速运营时,轮轨间作用力显著增强,激励频率范围变宽^[5]。激励产生的中高频振动传递到转向架及车体,造成零部件的振动特性与低速时大不相同^[6]。当列车侧向通过道岔时,剧烈的轮轨横向冲击将导致十分复杂的轮岔动态相互作用,引起车辆较强的横向振动,导致较大的脱轨系数,对行车安全产生不利影响。弹簧的横向刚度关系到列车曲线通过性和横向运动性能,而振动频率又会影响弹簧动态传递特性^[7]。现有文献大多仅对弹簧垂向刚度进行分析,而横向动刚度的研究近似空白,故探究不同激

励频率下螺旋弹簧横向刚度特性是具有理论价值和工程意义的。

本文对螺旋弹簧的横向静刚度及动刚度进行有限元分析。依据计算结果,对 Krettek 刚度公式进行修正,提高公式的计算精度。改变加载条件和弹簧参数,施加横向正弦位移激励进行频变分析,探究影响弹簧动态传递特性的因素。

1 螺旋弹簧横向静刚度

1.1 Krettek 刚度公式

传统的螺旋弹簧横向静刚度计算一般是将弹簧简化成等截面弹性直杆^[8]。定义弹簧等效弯曲刚度 B 、等效剪切刚度 S 、垂向静刚度 k_v 分别为:

$$B = \frac{EHd^4}{32nD(2+\mu)} \quad (1)$$

$$S = \frac{Hd^4}{8nD^3}E \quad (2)$$

$$k_v = \frac{Gd^4}{8D^3n} = \frac{Ed^4}{16(1+\mu)D^3n} \quad (3)$$

基金项目:国家重点研发计划资助项目(2018YFB1201703)

第一作者简介:张名扬(1996—)男,辽宁沈阳人,硕士研究生,研究方向为机车车辆结构强度、悬挂装置动特性分析。

式中: d 为簧丝直径; D 为弹簧中径; n 为弹簧有效圈数; E 为弹性模量; μ 为泊松比; H 为弹簧工作高度, $H=H_0-f_v-d$, f_v 为弹簧垂向压缩量, H_0 为弹簧自由高度。

假定弹簧受横向载荷变形过程中上、下端面始终保持水平,如图1所示。由于结构具有对称性,零弯矩点为弹簧中点,取二分之一为研究对象^[9]。建立弹簧变形的微分方程,带入边界条件,得到弹簧横向静刚度 k_1 的理论值为

$$k_1 = \frac{P_v}{\frac{2}{k} \left(1 + \frac{P_v}{S} \right) \tan \left(\frac{kH}{2} \right) - H} \quad (4)$$

其中

$$k = \sqrt{\frac{P_v}{B} \left(1 + \frac{P_v}{S} \right)} \quad (5)$$

式中 P_v 为垂向载荷, $P_v = k_v \times f_v$ 。

KRETTEK O等^[10]引入修正因子 α 来考虑弹簧 f_v 和 H_0 对横向静刚度的影响。Krettek刚度公式为

$$k_{ik} = \alpha k_1 = (\alpha f_v / H_0 + b) \times k_1 \quad (6)$$

式中 a 、 b 为修正系数。

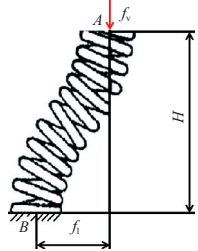


图1 横向变形示意图

1.2 有限元分析

为探究影响弹簧横向静刚度的因素,构建两端磨平的螺旋弹簧有限元计算模型。支撑区域由于形状相对复杂,采用SOLID95号单元;中间有效区域采用SOLID45号单元。为正确模拟实际工作状态,将弹簧上、下端面所有节点分别刚性耦合至各自的中心点A点及B点。在B点施加固定端约束,在A点施加垂向及横向位移载荷。通过静力分析,在ANSYS软件的POST26后处理模块中提取横向支反力,除以横向位移量 f_1 ,即可得到横向静刚度 k_1 的有限元分析结果。

肖维雄^[11]发现横向载荷的加载方向会对螺旋弹簧垂向静刚度 k_v 产生影响。为探究加载方向对 k_1 是否有影响,在受载端以A点为坐标原点,建立如图2所示的坐标系。 y 轴与受载端切口平面 S_1 的法向相平行,且向外为正。通过改变有效圈和支撑圈的圈数,调整受载端切口平面 S_1 和约束端切口平面 S_2 的相对位置,将两切口平面所夹角度 θ 分为4个区间。通过有限元计算,定性分析不同加载方向下 k_1 随 f_1 和 f_v 的变化趋势,如表1所示。

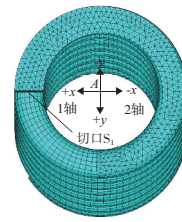
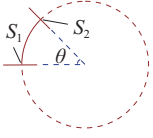
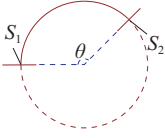
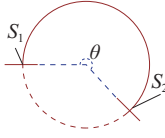
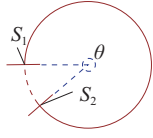
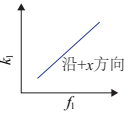
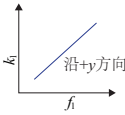
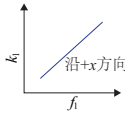
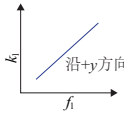
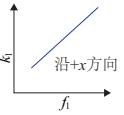
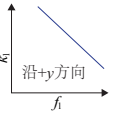
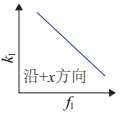
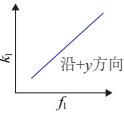
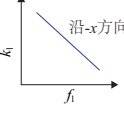
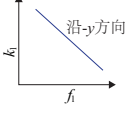
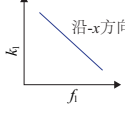
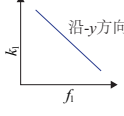
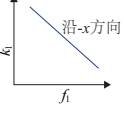
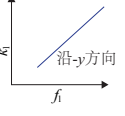
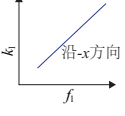
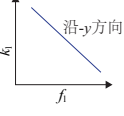
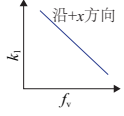
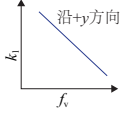
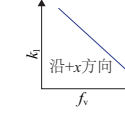
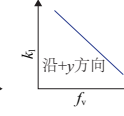
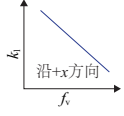
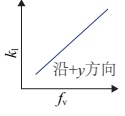
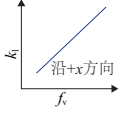
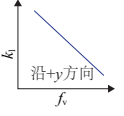
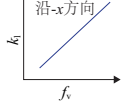
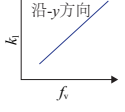
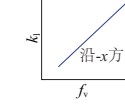
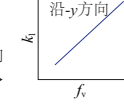
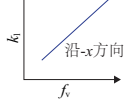
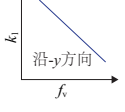
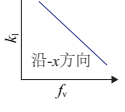
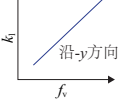


图2 平面直角坐标系

表1 切口平面不同位置横向静刚度变化趋势

切口平面相对位置及夹角 θ			
			
$0^\circ \sim 90^\circ$	$90^\circ \sim 180^\circ$	$180^\circ \sim 270^\circ$	$270^\circ \sim 360^\circ$
 	 	 	 
 	 	 	 
 	 	 	 
 	 	 	 

当载荷沿+x向加载,夹角 θ 在 $0^\circ \sim 270^\circ$ 范围内时, k_1 随着 f_1 的增加而增加;当 θ 在 $270^\circ \sim 360^\circ$ 范围内时, k_1 随 f_1 的增加而减小。沿-x向加载有相反的规律。

当载荷沿+y向加载,夹角 θ 在 $0^\circ \sim 180^\circ$ 和 $270^\circ \sim 360^\circ$ 范围内时, k_1 随着 f_1 的增加而增加;当 θ 在 $180^\circ \sim 270^\circ$ 范围内时, k_1 随 f_1 的增加而减小。沿-y向加载有相反的规律。

同时, k_1 随着 f_v 的变化趋势与随着 f_1 的变化趋势相反。

以弹簧两切口平面夹角 θ 在 $270^\circ \sim 360^\circ$ 内的模型为例,定量分析横向载荷加载方向对 k_1 的影响,如图3所示。依次改变 f_1 和垂向压缩量 f_v ,绘制 k_1 的变化曲线,如图4、图5所示。对于无垂向压缩的状态,无论横向载荷加载方向如何, k_1 均不随 f_1 发生改变,沿x轴、y轴加载时的刚度值分别为 386.65 N/mm 和 377.62 N/mm ;对于存在垂向压缩的状态, k_1 随 f_1 的增加呈负指数次的增加/减小,且最终都趋于无垂向压缩时的刚度值。当 f_v 远大于 f_1 时,弹簧垂向变形占主导地位,故 k_1 随 f_v 的增加呈线性增加/减小,且随着 f_1 的增加, k_1 变化速度减缓。

由上述分析可知,螺旋弹簧受载端的 f_1 和 f_v 都会对弹簧 k_1 产生影响,而Krettek刚度公式仅考虑了 f_v 的影响,故其存在一定偏差。

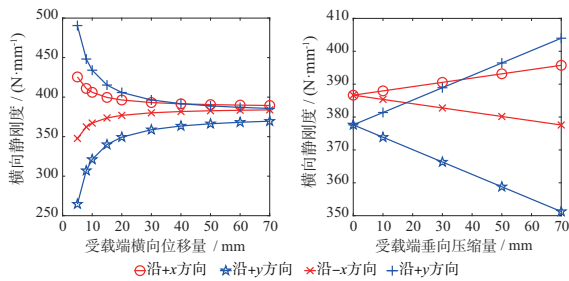


图3 不同加载方向横向静刚度变化曲线

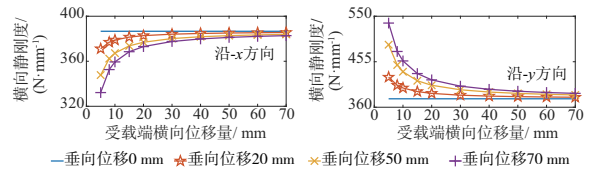
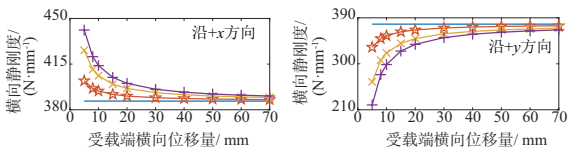


图4 横向静刚度随横向位移量变化曲线

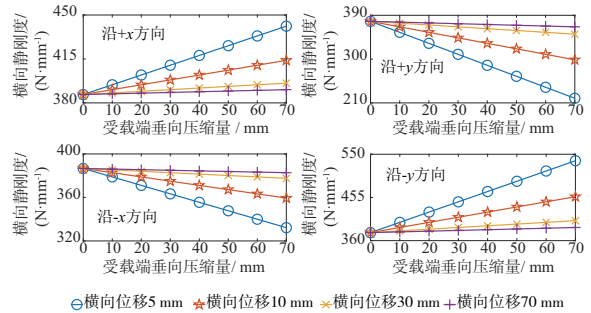


图5 横向静刚度随垂向压缩量变化曲线

1.3 横向静刚度修正公式

在Krettek刚度公式的基础上,综合考虑 f_v 和 f_1 对 k_1 的影响,对参数 α 进一步优化,建立三参数模型:

$$k_{13} = \left[\left(a_1 \times \frac{D}{f_1} + a_2 \right) \times \frac{f_v}{H_0} + a_3 \right] \times k_1 \quad (7)$$

式中 $a_1 \sim a_3$ 为修正系数。

为验证修正公式(7)的普遍适用性,建立不同参数的螺旋弹簧模型。通过对有限元计算结果的拟合,求得各自的横向静刚度修正系数,如表2所示。对比发现,对于沿同一轴正、反两个方向加载的情况,修正系数中只有系数 a_1 存在着正负的差别。螺旋弹簧在铁路车辆中均对称布置于构架两侧,为消除横向位移量对横向总刚度的影响,右侧弹簧可由左侧弹簧旋转 180° 后安装。

将不同 f_v 和 f_1 带入修正后的横向静刚度公式(7),与有限元法相比较的计算误差见表3。显然,公式(7)的计算精度和稳定性均优于现有方法。

表2 弹簧几何参数及修正系数

模型序号	簧丝直径/mm	弹簧中径/mm	有效圈数	自由高度/mm	垂向静刚度/(N/mm)	加载方向	a_1	a_2	a_3	公式编号
1	42.0	208.0	6.4	425.0	549.2	+x	0.018 4	-0.183 8	0.917 8	6.1.1
						+y	-0.053 3	-0.179 9	0.896 4	6.1.2
						-x	-0.018 4	-0.183 8	0.917 8	6.1.3
2	25.0	116.0	11.7	425.0	200.4	-y	0.053 3	-0.179 9	0.896 4	6.1.4
						+y	-0.325 9	3.617 1	0.796 2	6.2.1
3	31.2	206.8	4.7	355.0	218.2	-y	0.325 9	3.617 1	0.796 2	6.2.2
						+x	-0.163 2	-0.403 2	0.942 1	6.3.1
4	21.6	134.0	7.2	355.0	116.0	-x	0.163 2	-0.403 2	0.942 1	6.3.2
						+y	0.114 1	0.404 2	0.832 5	6.4.1
						-y	-0.114 1	0.404 2	0.832 5	6.4.2

表3 横向刚度修正公式计算误差绝对值

单位: $\text{N} \cdot \text{mm}^{-1}$

横向位移/mm	垂向压缩量/mm (括号内为公式编号)													
	10	70	10	70	10	70	10	70	70	10	70	10		
	(6.1.1)	(6.1.2)	(6.1.3)	(6.1.4)	(6.2.1)	(6.2.2)	(6.3.1)	(6.3.2)	(6.4.1)	(6.4.2)				
5	0.003	1.298	0.676	0.542	0.342	0.373	0.308	2.155	1.906	0.982	2.872	1.277	0.326	0.212
10	0.087	1.066	0.430	0.132	0.256	0.603	0.062	1.481	0.626	0.801	2.558	1.097	0.292	0.149
30	0.143	0.911	0.265	0.582	0.199	0.757	0.101	1.030	1.343	0.211	0.578	0.328	0.100	0.046
70	0.159	0.867	0.219	0.711	0.184	0.801	0.148	0.903	1.906	0.501	0.013	0.108	0.045	0.017

2 螺旋弹簧横向动刚度频变特性

2.1 横向动刚度变化趋势

中高频激励下,螺旋弹簧自身振动加剧,弹簧各点的运动情况变得非常复杂^[12]。特别是当激励频率较高时,刚度变化较大,振动传递特性与低频激励下存在较大差异^[13]。为研究弹簧在中高频激励下的动态响应,需进行频变分析。引入动刚度 k_d 来描述弹簧动态传递特性。由于螺旋弹簧在中高频激励下振动波动传递效应的存在,固定端和受载端由弹簧变形而产生的反力不同,将动刚度 k_d 进一步分为点刚度 k_{dP} 和传递刚度 k_{dT} ^[14]:

$$\begin{cases} k_{dP} = F_{WP}/u_m \\ k_{dT} = F_{WT}/u_m \end{cases} \quad (8)$$

式中 F_{WP} 、 F_{WT} 分别为弹簧受到幅值为 u_m 的正弦位移激励后,受载端和固定端的反作用力幅值。

在 B 点施加全约束,在 A 点施加垂向预压缩量 f_v 及横向正弦位移激励 $u_1(t)$ 。通过有限元计算,在 ANSYS 软件的 POST26 后处理模块中提取横向支反力 F_{WP} 和 F_{WT} ,除以 u_m ,即可得到 k_{dP} 和 k_{dT} 。

$$u_1(t) = u_m \sin(\omega t) = u_m \sin(2\pi f t) \quad (9)$$

式中 ω 、 f 为激励频率。

选取表 2 中的模型 1,设置加载条件: f_v 为 50 mm,横向位移激励沿 x 向加载, u_m 为 5 mm,材料的阻尼比为 0.05。

进行频变分析,绘制 k_d 随 f 变化曲线(简称 k_d-f 曲线),如图 6 所示。当 f 较低时, k_d 基本等于静刚度;当 f 位于弹簧各阶横向共振频率附近时, k_{dP} 急剧下降,出现谷值;高于共振频率后, k_d 升高并出现峰值。如此,随着 f 的提高, k_d 的谷值、峰值交替出现,总体呈波动上升的趋势。

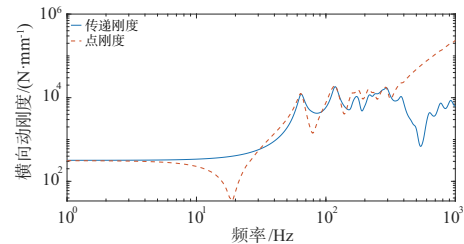


图6 横向动刚度随激励频率变化曲线

2.2 横向动刚度影响因素

为探究影响螺旋弹簧横向动态传递特性的因素,将 2.1 节中的模型 1 设为对照组,加载条件为激励加载方向为 x 轴向,垂向预压缩量为 50 mm,阻尼比为 0.05。每次只改变模型中的 1 个参数,通过有限元计算,进行频变分析,绘制 k_d-f 曲线。不同参数对弹簧横向动刚度的影响效果如表 4 所示,表中的频率是动刚度出现峰值和谷值点所对应的频率。

表4 弹簧动刚度极值点放大倍数及对应激励频率

动刚度/ $(\text{N} \cdot \text{mm}^{-1})$	对照组	激励加载方向			垂向预压缩量		阻尼比		
		1 轴向	y 轴向	2 轴向	0 mm	70 mm	0.03	0.04	
传递刚度	峰值 1	64.5 Hz	64.5 Hz	65.5 Hz	65.5 Hz	66.5 Hz	63.5 Hz	64.5 Hz	64.5 Hz
		38.38	39.37	32.86	32.92	33.26	41.11	62.88	47.67
	峰值 2	118 Hz	118 Hz	111 Hz	111.5 Hz	119.5 Hz	117 Hz	118 Hz	118 Hz
		57.74	69.14	36.88	42.33	46.44	63.90	95.37	71.95
	谷值 1	18.5 Hz	19 Hz	18.5 Hz	18.5 Hz	21 Hz	18 Hz	18.5 Hz	18.5 Hz
		0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.07	0.09
点刚度	峰值 1	64 Hz	64 Hz	64.5 Hz	64.5 Hz	66 Hz	63 Hz	64 Hz	64 Hz
		40.50	39.89	33.43	34.31	35.13	43.50	64.74	49.58
	谷值 2	79 Hz	78.5 Hz	78 Hz	78.5 Hz	81.5 Hz	78 Hz	79 Hz	79 Hz
		4.55	4.47	4.26	4.44	3.71	5.07	2.91	3.75
	峰值 2	117 Hz	117 Hz	111.5 Hz	110.5 Hz	119 Hz	115.5 Hz	117.5 Hz	117.5 Hz
		63.42	72.16	47.18	50.41	50.36	70.39	92.59	74.37
谷值 3	138.5 Hz	138 Hz	137.5 Hz	138 Hz	141 Hz	138 Hz	138.5 Hz	138.5 Hz	
	13.05	12.06	13.02	14.19	10.55	14.44	8.28	10.75	

改变横向激励的加载方向,如图 7 所示,发现加载方向仅影响到 k_d-f 曲线峰值段的形状,对横向动刚度总体的变化趋势并无显著影响。

改变 f_v 为 0 mm(无预压缩)和 70 mm 的初始状态,进

行有预应力的模态分析(表 5)。随着 f_v 的增加,各阶横向共振频率呈逐渐减小的趋势。施加横向激励,进行频变分析,绘制不同 f_v 下的 k_d-f 曲线,如图 8 所示。

改变激励幅值 u_m 为 10 mm 和 20 mm,进行频变分析。

发现不同 u_m 下的 k_d-f 曲线高度重合,即激励幅值并不会影响弹簧的动刚度特性。

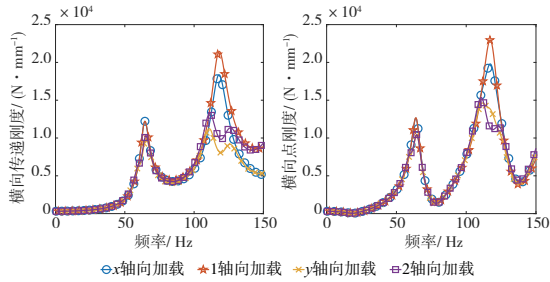


图7 不同加载方向横向动刚度随激励频率变化曲线

表5 不同预压缩量弹簧横向共振频率 单位:Hz

模态阶数	预压缩 0 mm		预压缩 50 mm		预压缩 70 mm	
	x 轴向	y 轴向	x 轴向	y 轴向	x 轴向	y 轴向
一阶	20.93	20.77	18.85	18.65	17.94	17.71
二阶	81.20	80.04	78.63	77.26	77.68	76.15
三阶	140.03	137.89	137.95	136.64	137.05	135.10

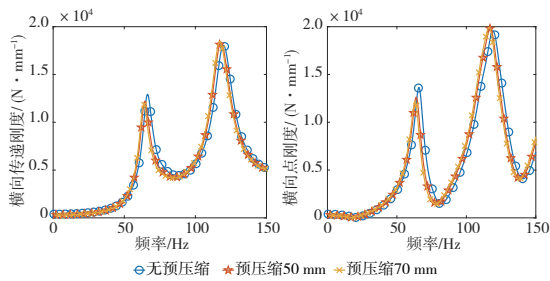


图8 不同预压缩量横向动刚度随激励频率变化曲线

改变材料的阻尼比为 0.03 和 0.04,得到不同阻尼下的 k_d-f 曲线,如图 9 所示。随着阻尼比的增大, k_d 的谷值呈不断增大,峰值呈不断减小的趋势,即提高弹簧材料的阻尼可显著降低 k_d 的波动幅值。在小阻尼的情况下,阻尼对共振频率无明显影响,故阻尼比的改变并不会影响波峰、波谷所对应的激励频率。

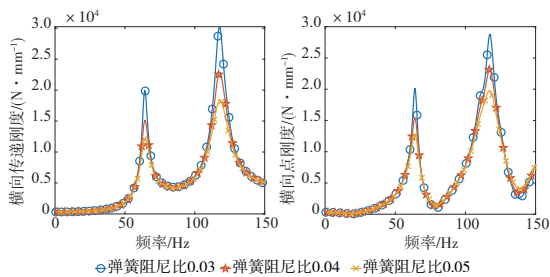


图9 不同阻尼比横向动刚度随激励频率变化曲线

3 结语

为探究等截面圆柱形螺旋压缩弹簧横向静刚度及动刚度特性,建立弹簧有限元计算模型。静载下,分析横向载荷的大小、加载方向及垂向压缩量对横向静刚度的影响,修正横向静刚度公式。动载下,依次改变横向激励的加载方向、激励幅值、垂向预压缩量和弹簧材料的阻尼等

参数,进行频变分析,绘制横向动刚度随激励频率变化曲线,分析横向动刚度的影响因素。结论如下:

1) 静载下,弹簧所受的横向位移量和垂向压缩量都会对横向静刚度产生影响,横向静刚度与横向位移量呈负指数次的关系,与垂向压缩量呈线性的关系。修正后的横向静刚度公式可综合考虑上述两个因素,计算精度和稳定性都有所提高。另外,横向载荷的加载方向以及螺旋弹簧上、下两切口平面的相对位置会影响横向静刚度的变化趋势,在工程应用中应注意这种影响。

2) 动载下,当横向激励频率等于弹簧各阶共振频率时,弹簧点刚度急剧下降,出现谷值;高于共振频率后,动刚度升高出现峰值。如此,随着激励频率的提高,螺旋弹簧横向动刚度的谷值、峰值交替出现,总体呈波动上升的趋势。选用阻尼比较高的弹簧材料可以显著降低横向动刚度的峰值,减小波动范围。垂向预压缩量及横向位移激励的幅值对横向动刚度基本没有影响。

参考文献:

- [1] 张英会,刘辉航,王德成. 弹簧手册[M]. 3版. 北京:机械工业出版社,2017.
- [2] FAKHREDDINE D, MOHAMED T, SAID A, et al. Finite element method for the stress analysis of isotropic cylindrical helical spring[J]. European Journal of Mechanics - A/Solids, 2005, 24(6): 1068-1078.
- [3] LEE J. Free vibration analysis of non-cylindrical helical springs by the pseudospectral method [J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 305(3): 543-551.
- [4] 严隽尧. 车辆工程[M]. 北京:中国铁道出版社,2007.
- [5] 翟婉明. 车辆-轨道耦合动力学[M]. 3版. 北京:科学出版社,2007.
- [6] POPP K, KRUSE H, KAISER I. Vehicle-track dynamics in the mid-frequency range [J]. Vehicle System Dynamics, 1999, 31(5/6): 423-464.
- [7] YILDIRIM V, SANCAKTAR E. Linear free vibration analysis of cross-ply laminated cylindrical helical springs[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2000, 42(6): 1153-1169.
- [8] 阳光武,肖守讷,张卫华. 螺旋圆弹簧的横向刚度分析[J]. 中国铁道科学, 2010, 31(4): 59-62.
- [9] 王娟,罗世辉,宋荣荣. 采用修正工作高度的方法计算铁道机车车辆螺旋弹簧刚度[J]. 内燃机车, 2009, 425(7): 30-32, 35-36.
- [10] KRETTEK O, SOBCZAK M. Zur berechnung der querund biegeknennung von schraubenfedern fuer schienenfahrzeuge[J]. ZEV-Glas Ann, 1988, (9): 319-326.
- [11] 肖维雄. 二系螺旋弹簧刚度计算[J]. 铁道车辆, 2007, 45(4): 7-9, 45.
- [12] WANG S L, LI X Y, LEI S, et al. Research on torsional fretting wear behaviors and damage mechanisms of stranded-wire helical spring [J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2011, 25(8): 2137-2147.
- [13] BERGER C, KAISER B. Results of very high cycle fatigue tests on helical compression springs [J]. International Journal of Fatigue, 2006, 28(11): 1658-1663.
- [14] 孙文静,宫岛,周劲松,等. 一系螺旋弹簧动刚度对车辆-轨道耦合振动影响分析[J]. 振动与冲击, 2015, 34(5): 49-55.

收稿日期:2020-05-11