

# 基于子结构技术和 Landweber 迭代正则化的载荷识别

周凤<sup>1</sup>, 缪炳荣<sup>2</sup>, 李泽<sup>1</sup>, 杨昌休<sup>1</sup>

(1. 重庆交通职业学院, 重庆 402247;

2. 西南交通大学 牵引动力国家重点实验室, 四川 成都 610031)

**摘要:**为解决大型复杂结构上的载荷识别问题,提出了一种基于子结构减缩技术和 Landweber 迭代正则化的载荷识别方法,将模型减缩技术中的子结构分析方法应用于动态响应的求解,基于 Landweber 迭代正则化来解决载荷识别过程中的不适定性问题。通过对比例车体模型的数值仿真分析,并与传统的 Tikhonov 正则化方法进行对比,其结果表明:该方法不仅能准确识别作用在比例车体上多种形式载荷,而且其抗噪性和鲁棒性均明显优于 Tikhonov 正则化方法。

**关键词:**载荷识别;正则化;子结构分析;Landweber 迭代

**中图分类号:**TU 311.3 **文献标志码:**A **文章编号:**1671-5276(2021)04-0077-05

## Load Identification Based on Substructure Technology and Landweber Iterative Regularization

ZHOU Feng<sup>1</sup>, MIAO Bingrong<sup>2</sup>, LI Ze<sup>1</sup>, YANG Changxiu<sup>1</sup>

(1. Chongqing Vocational College of Transportation, Chongqing 402247, China;

2. State Key Laboratory of Traction Power, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

**Abstract:** To solve the problem of large and complex structured load identification, a load identification method based on substructure reduction technique and Landweber iterative regularization was proposed. The substructure analysis method in the model reduction technology was applied to obtain dynamic response, and Landweber iterative regularization was used to solve the ill-posed problem in load identification process. Through the simulation analysis of the scaled car-body model, the proposed method was compared with the traditional Tikhonov regularization one. The results show that the proposed method can not only accurately identify various forms of load on the scaled car-body, but also bring about better performance in noise resistance and robustness than that of the Tikhonov regularization one.

**Keywords:** load identification; regularization; substructure analysis; Landweber iterative

## 0 引言

载荷识别在机械动态结构的健康监控、可靠性分析和故障诊断中都起着至关重要的作用<sup>[1]</sup>。然而,在许多工程实践中,例如风机叶片上的风力载荷、飞机上的空气动力载荷、铁路轨道和车轮之间的相互作用力等,这些载荷由于技术或经济的限制直接进行测量是很困难的,甚至是不可能的。所以,利用载荷识别技术来反求载荷的时间历程和位置是非常有必要的。

在过去的几十年里,动态载荷识别问题已经得到了广泛的研究。提出的方法中主要包含频域方法<sup>[2-7]</sup>和时域方法<sup>[8-13]</sup>两种。与频域方法相比,时域方法可以识别包括冲击载荷在内的各种载荷,识别结果具有明确的物理意义。时域方法在工程中具有良好的应用前景。

载荷识别作为结构动力学中第二类逆问题,具有典型

的不适定性,无论是对于频域方法还是时域方法,都需要正则化技术来找到准确的解决方案。目前,常用的正则化方法有截断奇异值分解(TSVD)、Tikhonov 正则化和迭代正则化方法<sup>[14-17]</sup>。

上述的载荷识别方法基本上都是关于简单的梁和板上所作用载荷的识别。但关于复杂大型结构的载荷识别研究较少。本文在文献[18]的基础上,利用 Landweber 迭代正则化求解反问题,以提高载荷识别的精度以及抗噪性,并利用模型减缩技术中的子结构分析,对大型有限元结构进行降阶处理,得到其子结构模型,在保证响应计算精度的同时,极大地缩短求解时间,提高计算效率。

另外,目前载荷识别在铁道车辆中的运用主要集中在轮轨力上的识别<sup>[19]</sup>,而关于车体表面动态载荷的识别研究还基本处于空白。本文利用提出的子结构技术与 Landweber 迭代正则化来识别比例车体有限元模型上的载荷。

**基金项目:**国家自然科学基金面上项目(51775456);重庆交通职业学院校级项目(CJKJ201919)

**第一作者简介:**周凤(1994—),女,重庆人,硕士研究生,研究方向为结构可靠性。

## 1 载荷识别原理

### 1.1 正问题模型的建立

具有  $n$  自由度的比例阻尼系统的动力学方程为

$$M\ddot{\mathbf{y}}(t) + C\dot{\mathbf{y}}(t) + K\mathbf{y}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (1)$$

式中:  $M$ 、 $C$ 、 $K$  分别为总体质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵;  $\mathbf{F}(t)$  为载荷向量;  $\mathbf{y}(t)$ 、 $\dot{\mathbf{y}}(t)$ 、 $\ddot{\mathbf{y}}(t)$  分别为位移、速度和加速度响应向量。

假定系统对单位脉冲的响应,即由载荷作用点到响应测量点的 Green 函数  $\mathbf{G}(t)$ ,则根据叠加原理,系统所受外载荷所引起的动态响应为

$$\mathbf{f}(t) = \int_0^t \mathbf{f}(\tau) \mathbf{G}(t - \tau) d\tau \quad (2)$$

考虑零初始条件系统,将上式卷积积分以  $\Delta(t)$  为离散的采样时间间隔,  $m$  为采样点数,离散为一组线性方程组,其矩阵形式表示如下:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & & & \\ \mathbf{G}_2 & \mathbf{G}_1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \mathbf{G}_m & \mathbf{G}_{m-1} & \cdots & \mathbf{G}_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{f}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{m-1} \end{Bmatrix} \Delta t \quad (3)$$

进一步,式(3)可以简单表示为

$$\mathbf{Y} = \mathbf{G}\mathbf{F} \quad (4)$$

其中:  $\mathbf{y}_i$ 、 $\mathbf{G}_i$ 、 $\mathbf{f}_i$  分别为  $t = i\Delta(t)$  的响应、Green 函数和待求的外载荷;  $\mathbf{G}$  为下三角矩阵,是由有限元求解得到的 Green 脉冲核函数响应建立的。

当响应中含有噪声时,通过方程式(4)求解外部载荷就变成一个病态的、不适定问题,就需要正则化技术解决这类病态问题。

### 1.2 Landweber 迭代正则化方法

考虑抽象的算子方程:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (5)$$

其中  $\mathbf{A}: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$  为有界线性算子,  $\mathbf{X}$  和  $\mathbf{Y}$  均为可分的 Hilbert 空间。

Landweber 迭代法的迭代格式为

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + w\mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1}) \quad (6)$$

其中  $0 < w \leq 1/\|\mathbf{A}\|^2$  为松弛因子。实际测试中,由于测量误差和噪声的影响,记带有误差的响应为  $\mathbf{y}_s$ ,则方程式(4)的 Landweber 迭代正则化解为

$$\mathbf{f}_k = \mathbf{f}_{k-1} + w\mathbf{G}^T(\mathbf{y} - \mathbf{G}\mathbf{f}_{k-1}) \quad (7)$$

式中的  $k$  与式(6)中的一样为迭代次数,发挥着正则化参数的作用。初始解向量  $\mathbf{f}_0$  可设置为  $\mathbf{f}_0 = \mathbf{0}$ 。

### 1.3 子结构分析方法

在利用上述迭代方法进行载荷识别时,需要计算有限元仿真系统的动响应。对于大型复杂的结构,其有限元模型的网格质量决定了仿真的精度,而越密的网格会导致求解动响应的时间也就越长,有时候甚至求解困难。采用子结构法将大型复杂结构按照一定的原则划分成若干个子

结构,先将每一个子结构减缩为很少自由度的模型,然后根据各子结构之间关系,组装得到整体结构的动态特性。本文采用的子结构分析方法属于模型减缩技术中的一种。

子结构法就是将一组单元用矩阵凝聚为一个超单元的过程。系统的运动平衡方程为

$$M\ddot{\mathbf{u}} + C\dot{\mathbf{u}} + K\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (8)$$

将  $\mathbf{u}$  分为主自由度  $\mathbf{u}_s$  和从自由度  $\mathbf{u}_c$  两部分,并令

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}\mathbf{u}_s \quad (9)$$

其中  $\mathbf{T}$  为转换矩阵。

采用 Guyan 缩减方法,将相同的转换矩阵  $\mathbf{T}$  扩展到式(8)中的质量矩阵和阻尼矩阵,即

$$M_s = \mathbf{T}^T M \mathbf{T}, C_s = \mathbf{T}^T C \mathbf{T} \quad (10)$$

新的平衡方程变为

$$M_s \ddot{\mathbf{u}}_s + C_s \dot{\mathbf{u}}_s + K_s \mathbf{u}_s = \mathbf{F}_s \quad (11)$$

此时自由度数缩减为主自由度数。

## 2 数值算例

为了验证上述 Landweber 迭代正则化识别的准确性、抗干扰性以及子结构分析技术对识别过程中计算效率改善的正确性,选择大型复杂的比例车体结构作为数值仿真模型。在 ANSYS 中建立如图 1 所示的有限元模型,主体结构采用 shell63 板壳单元进行离散化网格划分,该比例车体模型是相对高速列车 1:8 的简化模型,长×宽×高为 3 022 mm×407 mm×350.8 mm,模型材料为铝合金,即弹性模量  $E = 6.9 \times 10^{10}$  Pa,密度  $\rho = 2\ 700$  kg/m<sup>3</sup>,泊松比  $\nu = 0.3$ 。



图 1 比例车体有限元模型

### 2.1 子结构的应用及结果分析

ANSYS 软件中应用 Guyan 缩减法来计算缩减矩阵,而选取主自由度在矩阵缩减分析中起到关键作用,其准确程度将取决于主自由度的数量和分布位置。因此,根据文献[20]中主自由度的选取方法对该比例车体结构有限元模型进行主自由度的选取。在模型上选取包括加载点和响应测量点在内的共 301 个节点,缩减自由度后的比例车体有限元模型如图 2 所示。分析缩减前后结构的模态频率以及响应计算效率。

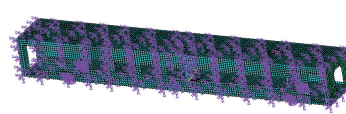


图 2 缩减自由度后的比例车体模型

#### 1) 缩减前后模态对比

表 1 为比例车体缩减前全自由度和缩减后模态频率的对比情况(去掉前 6 阶刚体模态)。图 3 为缩减前后模态频率对比图。从表 1 和图 3 都可以看出,所选取主自由

度后的子结构模型能满足模型的准确度,且对于前 4 阶模态,选取前后模态频率的相对偏差基本低于 1%或在 1%附近。这是由于主自由度的选取数量对低价模态影响较小,而对高阶模态影响较大。

表 1 比例车体主自由度选取前后模态对比

阶数	全自由度模态频率/Hz	子结构模态频率/Hz	相对偏差/%
1	59.343	59.791	0.755
2	63.593	64.222	0.989
3	71.209	71.992	1.099
4	79.357	79.749	0.494
5	80.099	81.295	1.493
6	86.656	87.941	1.483
7	91.568	93.278	1.867
8	95.076	96.958	1.979
9	101.05	103.65	2.573

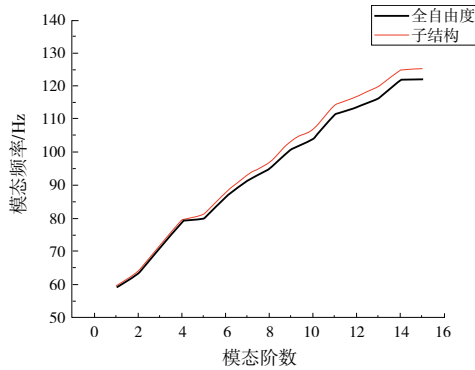


图 3 比例车体模态频率对比图

## 2) 核函数响应计算效率分析

分别对比例车体原模型和子结构缩减模型求脉冲核函数响应,比较这两种模型中计算相同时间历程的核函数响应所需要的实际 CPU 时间,如表 2 所示。其中采样周期为  $\Delta t=0.0005\text{ s}$ 。

表 2 缩减前后模型核函数响应计算时间 单位:s

加载时长	原模型求解时长	子结构模型求解时长
0.1	202	63
0.2	896	118
0.4	902	237
0.6	1 464	295
0.8	1 603	474
1.0	2 002	599

由表 2 可见,相比于全自由度的原模型,子结构模型大大减少了核函数响应计算时间,且所需计算的响应时间历程越长,子结构缩减模型提高计算效率的效果就越明显。因此,应用子结构技术将大大提高载荷识别过程中计算核函数响应的效率。

## 2.2 载荷识别结果分析

### 1) 不同形式载荷下的识别结果

在比例车体子结构模型的节点 5614 上施加垂直于上顶板的载荷,即  $z$  向上加载,并选取距离测量点较近的响应节点 5795( $z$  向)上的位移作为响应用于载荷识别。所施加的载荷分别取如下几种形式:

#### 1) 正弦载荷:

$$F_1(t) = \begin{cases} 60\sin(2\pi t/T), & 0 \leq t \leq 0.1 \\ 0, & 0.2 < t \leq 0.14 \end{cases} \quad (12)$$

#### 2) 三角载荷:

$$F_2(t) = \begin{cases} 8\,000t, & 0 \leq t \leq 0.01 \\ -8\,000t+160, & 0.01 < t \leq 0.03 \\ 8\,000t-320, & 0.03 < t \leq 0.05 \\ -8\,000t+480, & 0.05 < t \leq 0.07 \\ 8\,000t-640, & 0.07 < t \leq 0.09 \\ -8\,000t+800, & 0.09 < t \leq 0.1 \\ 0, & 0.1 < t \leq 0.14 \end{cases} \quad (13)$$

#### 3) 方波载荷:

$$F_3(t) = \begin{cases} 100, & 0 < t \leq 0.03 \\ -100, & 0.03 < t \leq 0.06 \\ 100, & 0.06 < t \leq 0.09 \\ -100, & 0.09 < t \leq 0.12 \\ 0, & 0.12 < t \leq 0.15 \end{cases} \quad (14)$$

正弦载荷、三角载荷和方波载荷选用不同的采样频率,即  $f_1=2\,000\text{ Hz}$ 、 $f_2=4\,000\text{ Hz}$  和  $f_3=3\,333.33\text{ Hz}$ ,利用 Landweber 迭代正则化方法进行载荷识别,并对比传统的 Tikhonov 正则化。各载荷形式下的识别结果分别如图 4-图 6 所示。

由图 4-图 6 可以看出,对于不同形式的载荷,在没有噪声的情况下,传统的 Tikhonov 正则化方法和 Landweber 迭代正则化都能准确地识别载荷,这是由于在响应数据不含有噪声时(实际情况中几乎是不存在的),可以直接通过矩阵求逆法反求载荷,即此时有无正则化的识别效果相差不大,所以这两种正则化方法下的载荷识别结果相似。但从图 4 和图 6 也可以发现,传统 Tikhonov 正则化方法在载荷值突变处以及时间起始点处,相比于 Landweber 迭代正则化的识别误差较大。

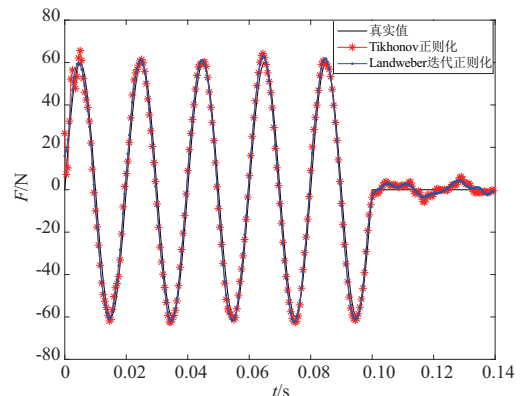


图 4 正弦载荷识别结果对比

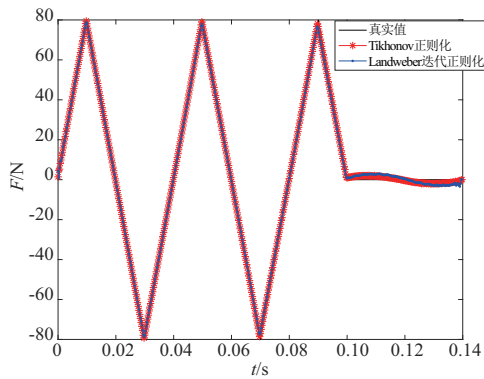


图 5 三角载荷识别结果对比

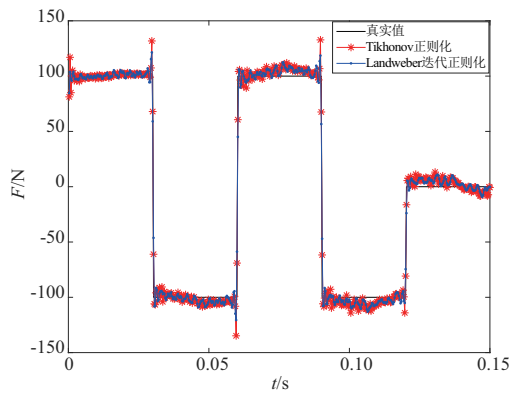


图 6 方波载荷识别结果对比

2) 不同噪声水平下的识别结果

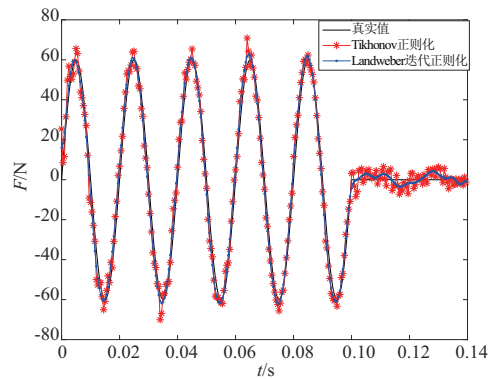
由于实际测量的响应信号  $y$  中总是包含噪声,在仿真得到的响应数据中加入不同水平的随机噪声来模拟测试误差。带噪声的响应可表示成如下形式:

$$y_{\text{noise}} = y(t) + l_{\text{noise}} \text{std}[y(t)] \text{rand}(-1, 1) \quad (15)$$

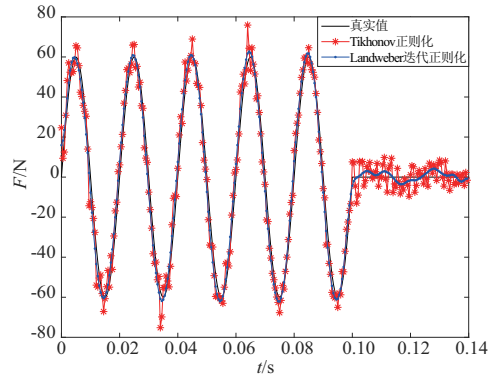
其中: $y(t)$  为仿真得到的位移响应; $\text{std}[y(t)]$  为位移响应  $y(t)$  的标准差; $l_{\text{noise}}$  为噪声水平的百分数; $\text{rand}(-1, 1)$  为区间  $[-1, 1]$  上的随机数。

首先,对于正弦载荷在噪声水平分别为 3%、5% 和 10% 的载荷识别结果如图 7 所示。从图 7 可以看出,随着噪声水平的增大,Tikhonov 正则化识别的误差逐渐增加,并且到噪声水平为 10% 时,已经不能识别出所加载荷。图 7(c) 中,Tikhonov 正则化方法在  $t = 0.03 \text{ s}$  附近,识别结果已经趋于发散。而 Landweber 迭代正则化在这 3 种噪声水平下都能较准确地识别,识别精度并没有随着噪声水平的波动而发生较大变化。

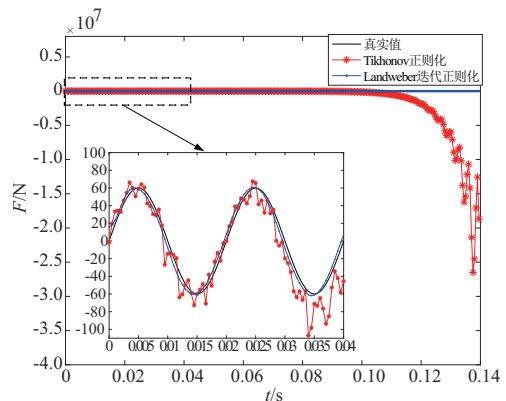
为了更进一步说明噪声的影响,选取正弦载荷在噪声水平为 5% 下,随机 5 个不同的离散时间点上识别的结果如表 3 所示,得到 Landweber 迭代正则化识别误差,除了少许的几个时间点,基本在 5% 以下,且大部分的识别相对误差低于 Tikhonov 方法。同时分析在噪声水平为 5% 下,三角载荷和方波载荷的识别结果如图 8、图 9 所示。从这两幅图中可以看出,与正弦载荷类似,在 5% 的噪声水平下 Landweber 正则化识别三角和方波这两种载荷的识别精度明显高于 Tikhonov 正则化。



(a) 噪声水平为 3%



(b) 噪声水平为 5%



(c) 噪声水平为 10%

图 7 在不同噪声水平 (3%、5%、10%) 下正弦载荷的识别结果

表 3 在噪声水平 5% 下随机 5 个时间点上正弦载荷的识别误差

时间/ s	真实值/ N	Tikhonov 正则化		Landweber 迭代正则化	
		识别值/N	误差/%	识别值/N	误差/%
0.015	-59.261	-67.140	13.29	-60.481	2.06
0.038	-42.426	-44.547	5.00	-37.637	11.29
0.046	60.000	68.936	14.89	60.635	1.06
0.066	59.261	64.544	8.91	60.140	1.48
0.097	-53.460	-47.146	11.81	-50.909	4.77



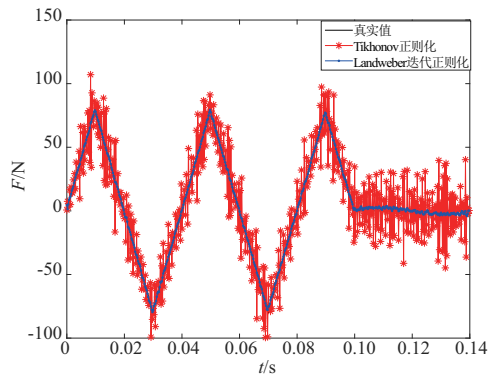


图 8 噪声水平为 5%下三角载荷的识别结果

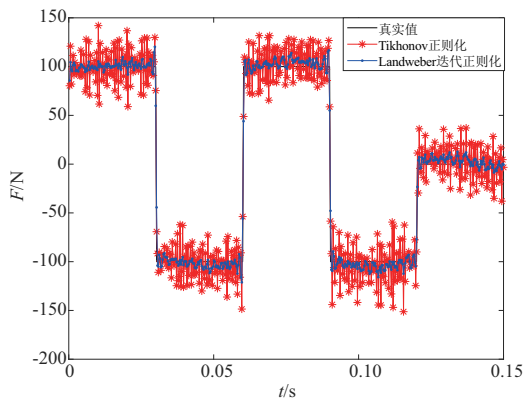


图 9 噪声水平为 5%下方波载荷的识别结果

### 3 结语

本文利用 Landweber 迭代正则化解决载荷识别过程的病态逆问题。结合子结构分析技术,识别作用于比例车体有限元模型上的正弦、三角以及方波载荷,并与传统的 Tikhonov 正则化进行比较,得到以下结论:

1) Landweber 迭代正则化可以高精度识别作用于比例车体仿真模型的多种形式载荷;

2) 应用子结构分析的模型缩减技术可以提高识别过程中计算核函数响应的效率,从而减少整个迭代反求的时间,更快速准确地求得所加载荷;

3) 在识别此类大型复杂有限元结构上作用的载荷时, Tikhonov 正则化方法对噪声很敏感,达到一定噪声水平后其解便趋于发散,不能识别出所施加载荷,而 Landweber 迭代正则化能够有效抑制噪声,且整体识别精度高。

本文将子结构缩减技术和 Landweber 迭代正则化用于求解比例车体有限元模型上所施加的载荷,为识别复杂的高速列车车体表面动态载荷的分布及其动态特性的研究奠定基础。

#### 参考文献:

[1] PARK J, HA S, CHANG F K. Monitoring impact events using a system-identification method [J]. *AIAA Journal*, 2009, 47(9): 2011-2021.

- [2] THITE A N, THOMPSON D J. The quantification of structure-borne transmission paths by inverse methods. part 1: Improved singular value rejection methods [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 264(2): 411-431.
- [3] THITE A N, THOMPSON D J. The quantification of structure-borne transmission paths by inverse methods. part 2: use of regularization techniques [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 264(2): 433-451.
- [4] 智浩, 文祥荣, 缪龙秀, 等. 动态载荷的频域识别方法 [J]. *北方交通大学学报*, 2000, 24(4): 5-10.
- [5] LIU Y, SHEPARD W S. Dynamic force identification based on enhanced least squares and total least-squares schemes in the frequency domain [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 282(1/2): 37-60.
- [6] 胡杰, 张希农. 一种频域载荷识别的优化方法 [J]. *噪声与振动控制*, 2009, 29(6): 34-36.
- [7] LAGE Y E, MAIA N M M, NEVES M M, et al. Force identification using the concept of displacement transmissibility [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, 332(7): 1674-1686.
- [8] DOYLE J F. A wavelet deconvolution method for impact force identification [J]. *Experimental Mechanics*, 1997, 37(4): 403-408.
- [9] 朱涛, 肖守讷, 阳光武. 一种新的时域动态载荷识别方法 [J]. *西南交通大学学报*, 2012, 47(6): 968-973.
- [10] LIU J, MENG X H, JIANG C, et al. Time-domain Galerkin method for dynamic load identification [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2016, 105(8): 620-640.
- [11] 周盼, 张权, 率志君, 等. 动载荷识别时域方法的研究现状与发展趋势 [J]. *噪声与振动控制*, 2014, 34(1): 6-11.
- [12] LIU J, SUN X S, HAN X, et al. Dynamic load identification for stochastic structures based on Gegenbauer polynomial approximation and regularization method [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2015, 56: 35-54.
- [13] 周凤, 缪炳荣, 王明月, 等. 基于时域正演法的载荷识别 [J]. *机械制造与自动化*, 2018, 47(4): 152-155, 192.
- [14] 肖悦, 陈剑, 李家柱, 等. 动态载荷时域识别的联合去噪修正和正则化预优迭代方法 [J]. *振动工程学报*, 2013, 26(6): 854-863.
- [15] 王林军. 正则化方法及其在动态载荷识别中的应用 [D]. 长沙: 湖南大学, 2011.
- [16] QIAO B J, ZHANG X W, WANG C X, et al. Sparse regularization for force identification using dictionaries [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, 368: 71-86.
- [17] AUCEJO M, DE SMET O. A multiplicative regularization for force reconstruction [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2017, 85: 730-745.
- [18] 常晓通, 闫云聚, 刘鑫. Landweber 迭代正则化方法在动态载荷识别中的应用 [J]. *应用数学和力学*, 2013, 34(9): 948-955.
- [19] 朱涛, 肖守讷, 阳光武. 载荷识别研究进展及其运用于铁道轮-轨载荷研究概述 [J]. *铁道学报*, 2011, 33(10): 29-36.
- [20] 包学海, 池茂儒, 杨飞. 子结构分析中主自由度选取方法研究 [J]. *机械*, 2009, 36(4): 18-20.

收稿日期: 2020-06-18