

帘线/橡胶复合材料轴向应力-应变的率相关预测模型研究

杨锋¹,张越¹,王玺¹,仲健林²

(1. 北京航天发射技术研究所,北京 100076; 2. 南京理工大学 机械工程学院,江苏 南京 210094)

摘要:设计一种帘线/橡胶复合材料轴向应力-应变的率相关预测模型。利用自主搭建的静态拉伸实验装置和分离式霍普金森拉伸装置,开展帘线/橡胶复合材料试件轴向拉伸实验;构建帘线应变能函数,推导特定应变率下帘线/橡胶复合材料的轴向应力-应变关系式;提出应变能函数的率增强项,建立帘线/橡胶复合材料轴向应力-应变的率相关预测模型。研究表明:特定应变率下,轴向应力-应变理论曲线与实验曲线符合较好;不同应变率下,率相关模型预测曲线与实验曲线符合较好。

关键词:帘线/橡胶复合材料;SHTB 拉伸实验;应变能函数;率相关

中图分类号:TP391.9 **文献标志码:**B **文章编号:**1671-5276(2023)03-0140-04

Research on Rate-dependent Prediction Model of Axial Stress-strain for Cord/Rubber Composite Material

YANG Feng¹, ZHANG Yue¹, WANG Xi¹, ZHONG Jianlin²

(1. Beijing Institute of Space Launch Technology, Beijing 100076, China;

2. School of Mechanical Engineering, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract: A rate-dependent model to predict the axial stress-strain relationship for the cord/rubber composite material is designed. The tensile test for the cord/rubber composite material specimen is conducted by the self-made static tensile experiment device and SHTB testing machine. The strain energy function of the cord is built, and the axial stress-strain relationship equation for the cord/rubber composite material under specific strain rate is deduced. The rate reinforcing effect equation for the strain energy function is provided, and the rate-dependent model to predict the axial stress-strain for the cord/rubber composite material is built. The research shows that the theoretical curve and the experimental curve of the axial stress-strain meet well under specific strain rate, and under different strain rate the rate-dependent model prediction curve and the experimental curve fit well.

Keywords: cord/rubber composite material; SHTB tensile test; strain energy function; rate-dependent

0 引言

帘线/橡胶复合材料以橡胶为基体、帘线为增强相,具有比强度高、比刚度高等优点,常用于构成自适应底座等柔性部件,以承受高速冲击载荷^[1]。帘线方向(轴向)是帘线/橡胶复合材料主受力方向。目前,关于帘线/橡胶复合材料轴向力学性能的研究,引起了广泛关注。MANSOR等^[2-3]基于微观力学理论,采用 Halpin-Tsai 方程预测了帘线/橡胶复合材料轴向静态力学性能。TONATTO等^[4-5]通过实验测试手段,研究了帘线/橡胶复合材料轴向模量和疲劳性能。任杰等^[6]提出了帘线/橡胶复合材料精确建模方法,研究了其拉伸模量、伸长率等参数。考虑到帘线/橡胶复合材料的工作环境常常涉及爆炸、冲击等高应变率工况,ALIMARDANI等^[7-9]从微观角度出发,采用自洽法、weibull 强度理论、Moritanaka 等方法数值

模拟了帘线/橡胶复合材料的黏弹力学特性。可见,当前对帘线/橡胶复合材料轴向力学性能的研究主要集中在对其单向静态力学性能,少有的率相关力学特性的研究也以细观力学手段为主,往往形式复杂,结果分析困难。从宏观唯象角度出发,研究帘线/橡胶复合材料的轴向力学性能,建立其轴向应力-应变的率相关预测模型,对于形成其高效的动态响应预测方法具有重要的意义。

1 不同应变率下轴向拉伸实验

1.1 实验装置和试件夹持

本文中试件尺寸和受力均较小,常规材料实验机上难以装夹。准静态拉伸实验采用自主搭建的静态拉伸实验装置进行,高应变率单轴拉伸实验采用分离式霍普金森拉伸装置进行。

实验应变率 $\dot{\varepsilon}$ 共计 6 级,分别为: 0.01 s^{-1} 、 260 s^{-1} 、 800 s^{-1} 、 $1\,100 \text{ s}^{-1}$ 、 $1\,200 \text{ s}^{-1}$ 、 $1\,600 \text{ s}^{-1}$,加载方向沿帘线/橡胶复合材料的帘线方向(轴向)。复合材料试件宽度为 5 mm,长度为 8 mm,试件夹持如图 1 所示。

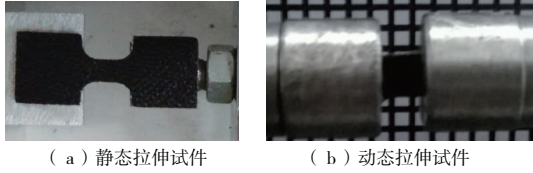


图 1 试件夹持

1.2 实验结果与分析

整理数据采集系统得到的信号,不同应变率下试件工程应力 P_{11} -工程应变 ε_{11} 曲线,如图 2 所示。

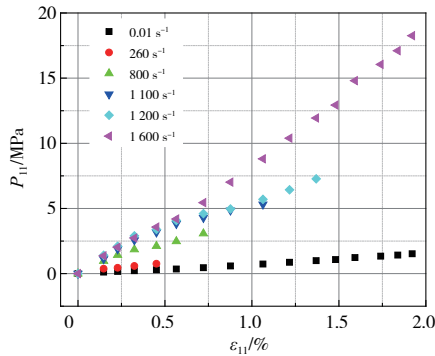


图 2 不同应变率下应力-应变曲线

由图 2 可知,试件应力随应变增大而增大;随应变率增大,同一应变下,试件应力增大。帘线/橡胶复合材料轴向力学性能表现出明显的率相关性。

2 特定应变率下轴向应力-应变关系式

2.1 帘线应变能函数

将帘线/橡胶复合材料视作横观各向同性,其应变能函数 w 可表示为关于右 Green 变形张量 \mathbf{C} 和帘线初始方向单位向量 \mathbf{a}_0 的不变量的函数:

$$w = w[I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C}), I_4(\mathbf{C}, \mathbf{a}_0), I_5(\mathbf{C}, \mathbf{a}_0)] \quad (1)$$

式中: I_1, I_2, I_3 为 \mathbf{C} 的 3 个不变量; I_4, I_5 为 \mathbf{C} 的 2 个伪不变量,满足:

$$\begin{cases} I_1 = \text{tr}(\mathbf{C}), I_2 = \frac{1}{2} [\text{tr}(\mathbf{C})^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)], I_3 = |\mathbf{C}| \\ I_4 = \mathbf{C} : (\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0) = \lambda^2, I_5 = \mathbf{C}^2 : (\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0) \end{cases} \quad (2)$$

式中 λ 为帘线伸长率。

帘线/橡胶复合材料应变能 w 由帘线横观各向同性弹性应变能 w_{tr} 和橡胶各向同性超弹性应变能 w_{MR} 组成,即: $w = w_{\text{tr}} + w_{\text{MR}}$ 。帘线类材料 w_{tr} 可表示为 I_4, I_5 的多项式或指数函数形式,本文中帘线与橡胶相互作用界面是完整的,忽略 I_5 项。根据文献[10]中下纤维束应力-应变

曲线,获得纤维束应变能与 I_4 之间的响应曲线如图 3 所示。

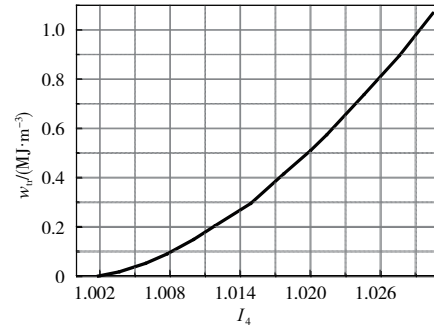


图 3 纤维束应变能与 I_4 曲线

根据图 3 应变能与 I_4 之间的响应曲线,当无变形产生($I_4 = 1$)时,则 $w_{\text{tr}} = 0$,发生变形时应变能始终为正;随帘线拉伸, w_{tr} 与 I_4 呈正相关,通过数学归纳,提出帘线应变能函数 w_{tr} 为

$$w_{\text{tr}} = c_4 (I_4^{1/2} - 1)^2 \quad (3)$$

橡胶各向同性超弹性应变能 w_{MR} 采用适合描述中、小应力学行为的 $M-R$ 形式,考虑橡胶基体的不可压缩性,则 w_{MR} 可表示为^[11]

$$w_{\text{MR}} = c_1(I_1 - 3) + c_2(I_2 - 3) \quad (4)$$

结合式(3)和式(4),帘线/橡胶复合材料的应变能函数 w 可表示为

$$w = c_4 (I_4^{1/2} - 1)^2 + c_1(I_1 - 3) + c_2(I_2 - 3) \quad (5)$$

式(3)~式(5)中 c_1, c_2, c_4 为材料常数。

2.2 轴向应力应变关系式

轴向拉伸下,设帘线/橡胶复合材料在 3 个正交方向的伸长率分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$,则变形梯度张量 $\mathbf{F} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$,右 Green 变形张量 \mathbf{C} 和左 Green 变形张量 \mathbf{B} 可表示为

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

根据链导法则,将应变能函数 w 对右 Green 变形张量 \mathbf{C} 求导,得到二阶 Piola-Kirchhoff 应力张量 \mathbf{S} :

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial w}{\partial \mathbf{C}} = 2 \sum_{i=1}^4 \frac{\partial w}{\partial I_i} \cdot \frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{C}} = 2 \left(\frac{\partial w}{\partial I_1} + \frac{\partial w}{\partial I_2} I_1 \right) \mathbf{I} - 2 \frac{\partial w}{\partial I_2} \mathbf{C} + 2 \frac{\partial w}{\partial I_4} \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 \quad (7)$$

Cauchy 应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 为

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \quad (8)$$

式中 J 为复合材料轴向拉伸体积变化率。

结合式(7)和式(8)可得

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{J} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial I_1} + \frac{\partial w}{\partial I_2} I_1 \right) \mathbf{B} - \frac{\partial w}{\partial I_2} \mathbf{B}^2 + I_4 \frac{\partial w}{\partial I_4} \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 \right] \quad (9)$$

式中: $\frac{\partial w}{\partial I_1} = c_1$; $\frac{\partial w}{\partial I_2} = c_2$; $\frac{\partial w}{\partial I_4} = c_4(1 - I_4^{-1/2})$ 。

本文中研究的帘线/橡胶复合材料为近似不可压缩材料,设轴向伸长率为 λ ,则变形梯度张量 $\mathbf{F} = \text{diag}(\lambda, \lambda^{-1/2}, \lambda^{-1/2})$,单轴拉伸沿帘线方向加载,则 $\mathbf{a}_0 = \text{diag}(1, 0, 0)$,结合式(5)和式(9),轴向工程应力 P_{11} 与轴向 Cauchy 应力 σ_{11} 满足 $P_{11} = \lambda^{-1}\sigma_{11}$,轴向应变 ε_{11} 与伸长率 λ 满足 $\varepsilon_{11} = \lambda - 1$,可得特定应变率下帘线/橡胶复合材料轴向应力-应变关系式

$$P_{11} = 2c_1 \left[1 + \varepsilon_{11} - \frac{1}{(1 + \varepsilon_{11})^2} \right] + 2c_2 \left[1 - \frac{1}{(1 + \varepsilon_{11})^3} \right] + 2c_4 \varepsilon_{11} \quad (10)$$

2.3 关系式参数拟合与实验验证

根据式(10),结合图4中实验数据,利用最小二乘法拟合确定参数 c_1, c_2, c_4 的值,各应变率下参数 c_1, c_2, c_4 的值如表1所示。

表1 各应变率下参数值

参数	应变率/ s^{-1}					
	0.01	260	800	1 100	1 200	1 600
c_1	-1.244	-9.522	-4.316	8.577	-9.052	-14.930
c_2	0.812	5.994	3.769	-3.828	7.300	9.747
c_4	1.805	12.530	6.174	-9.054	12.190	21.670

将 c_1, c_2, c_4 值代入式(10)中,将获得的轴向应力-应变理论预测曲线与实验曲线进行对比,如图4所示,理论曲线和实验曲线符合较好,表明了文中提出的帘线应变能函数的有效性。

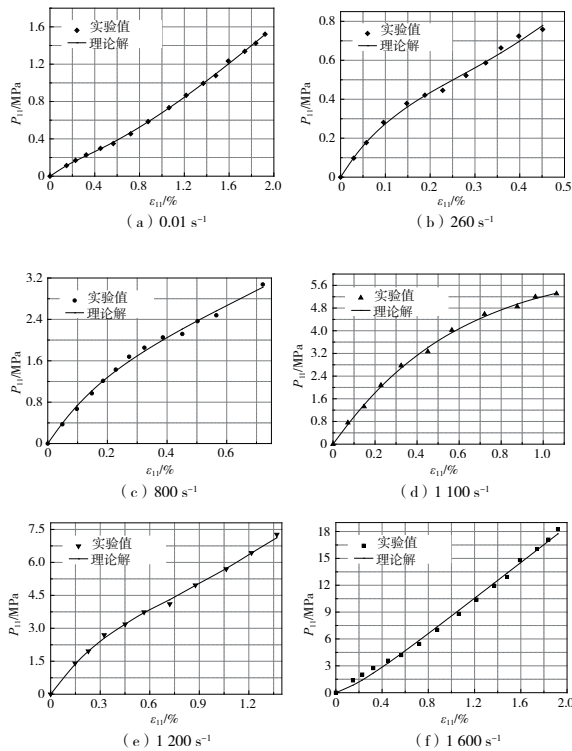


图4 理论曲线与实验曲线对比

3 轴向应力-应变的率相关预测模型

3.1 应变能函数的率增强项

随应变率增加,相同伸长率下的应变能增加,本文通过应变能函数的率增强项,表征帘线/橡胶复合材料力学性能的率相关效应。将表1参数拟合值代入式(5),计算获得伸长率分别为1.005、1.010、1.020时不同应变率下的应变能,如表2所示。

表2 不同应变率下的应变能

λ	应变率/ s^{-1}					
	0.01	260	800	1 100	1 200	1 600
1.005	1.26×10^{-5}	4.81×10^{-5}	1.10×10^{-4}	1.50×10^{-4}	1.60×10^{-4}	2.20×10^{-4}
1.010	5.02×10^{-5}	1.80×10^{-4}	4.40×10^{-4}	5.50×10^{-4}	6.20×10^{-4}	6.80×10^{-4}
1.020	9.51×10^{-4}	1.26×10^{-3}	1.46×10^{-3}	1.56×10^{-3}	1.58×10^{-3}	1.91×10^{-3}

对应变率 $\dot{\varepsilon}$ 进行无量纲处理,定义无量纲应变率 $\dot{\varepsilon}^* = 1 + \dot{\varepsilon}/\dot{\varepsilon}^0$,其中 $\dot{\varepsilon}^0$ 为参考应变率。通过对不同伸长率下应变能函数与无量纲应变率的值进行数学归纳,给出应变能函数和无量纲应变率自然对数值之间的关系,如图5所示。

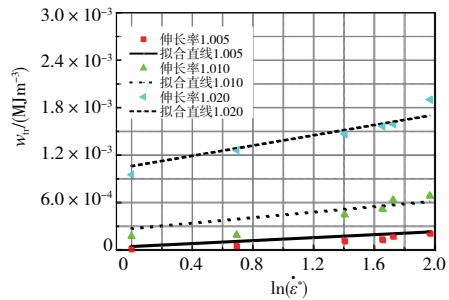


图5 应变能与无量纲化应变率自然对数的关系

由图5可知,对于任意伸长率,应变能随应变率的增加而增加,且应变能与无量纲应变率的自然对数呈一阶线性相关;图中3条直线近似相互平行,即表明对于任意伸长率,应变率对于应变能函数的增强是相同的。因此,对于应变能函数 w ,提出其率增强项 φ 为

$$\varphi = A + B \ln(\dot{\varepsilon}^*) \quad (11)$$

式中 A, B 为应变率系数。

3.2 率相关预测模型建立

结合式(5)应变能函数 w 和式(11)率增强项 φ 及率相关效应的帘线/橡胶复合材料的应变能函数 w' 为

$$w' = \varphi w = \varphi \left[c_4 (I_4^{1/2} - 1)^2 + c_1 (I_1 - 3) + c_2 (I_2 - 3) \right] \quad (12)$$

结合式(9)和式(12),可得帘线/橡胶复合材料轴向应力 σ'_{11} 率相关预测模型为

$$P_{11} = \left\{ 2c_1 \left[1 + \varepsilon_{11} - \frac{1}{(1 + \varepsilon_{11})^2} \right] + 2c_2 \left[1 - \frac{1}{(1 + \varepsilon_{11})^3} \right] + 2c_4 \varepsilon_{11} \right\} \cdot (A + B \ln(\dot{\varepsilon}^*)) \quad (13)$$

3.3 率相关预测模型参数拟合与实验验证

针对帘线/橡胶复合材料轴向应力-应变的率相关预测模型,选取应变率为 260 s^{-1} 的曲线进行拟合,将实验数据代入率相关预测模型中,通过最小二乘法确定式(13)中参数 c_1 、 c_2 、 c_4 、 A 、 B 的值,如表3所示。

表3 预测模型参数值

参数	c_1	c_2	c_4	A	B
数值	-1.244	0.812	1.805	-10.170	4.899

将参数拟合值代入式(13)中,计算获得各应变率下帘线/橡胶复合材料轴向应力-应变的预测曲线,并与实验曲线进行对比,如图6所示,率相关模型预测曲线与实验曲线符合较好,通过一组特定应变率下的实验曲线拟合获得率相关预测模型的参数,进而由率相关预测模型即可预测任意应变率下帘线/橡胶复合材料轴向应力-应变关系,验证了文中提出的率相关预测模型的正确性和有效性。

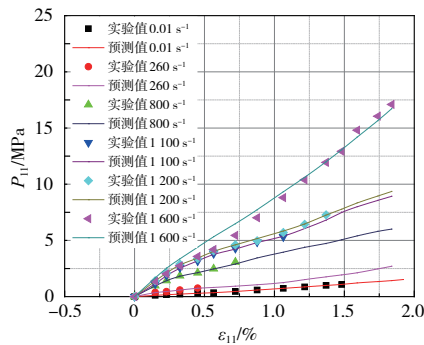


图6 不同应变率下应力-应变曲线对比

4 结语

本文开展了不同应变率下,帘线/橡胶复合材料轴向拉伸实验,推导了特定应变率下复合材料轴向应力-应变关系式,建立了轴向应力-应变关系的率相关预测模型。得到了以下结论。

1) 随应变率的增大,帘线/橡胶复合材料拉伸的应力增大,帘线/橡胶复合材料表现出应变率硬化效应。帘线/橡胶复合材料的力学响应与应变率密切相关。

2) 特定应变率下,轴向应力-应变关系理论曲线与实验曲线符合较好,表明了文中提出的帘线应变能函数的正确性,验证了轴向应力-应变关系式描述特定应变率下轴向拉伸行为的有效性。

3) 不同应变率下,率相关模型预测曲线与实验曲线符合较好,表明了文中提出的率增强项的正确性,验证了帘线/橡胶复合材料轴向应力-应变率相关预测模型的有效性。

4) 从宏观唯象角度出发,研究帘线/橡胶复合材料的轴向力学性能,建立其轴向应力-应变的率相关预测模型,形成了其高效的动态响应预测方法。

文中研究方法和结论能够为帘线/橡胶复合材料的动态力学响应研究提供理论参考和技术支撑。

参考文献:

- [1] 任杰,马大为,仲健林. 悬垂弹射自适应底座附加荷载变化机理研究[J]. 兵工学报,2014,35(5):670-675.
- [2] MANSOR M R, SAPUAN S M, ZAINUDIN E S, et al. Rigidity analysis of kenaf thermoplastic composites using halpin - tsai equation[J]. Applied Mechanics and Materials,2014,548/549:29-33.
- [3] GINER E, VERCHER A, MARCO M, et al. Estimation of the reinforcement factor ξ for calculating the transverse stiffness E_2 with the Halpin - Tsai equations using the finite element method[J]. Composite Structures,2015,124:402-408.
- [4] TONATTO M L P, FORTE M M C, AMICO S C. Compressive-tensile fatigue behavior of cords/rubber composites[J]. Polymer Testing,2017,61:185-190.
- [5] WAN J J, LI Z, YANG Y H, et al. Factors influencing resorcinol-formaldehyde-latex-coated continuous basalt fiber cord/rubber interfacial fatigue behavior: loading direction and RFL formula[J]. Journal of Applied Polymer Science, 2018, 135(32):46619.
- [6] 任杰,仲健林,马大为. 一种基于帘线/橡胶复合材料细观力学的精确建模方法[J]. 复合材料学报,2014,31(6):1516-1524.
- [7] ALIMARDANI M, RAZZAGHI-KASHANI M, GHOREISHY M H R. Prediction of mechanical and fracture properties of rubber composites by microstructural modeling of polymer - filler interfacial effects[J]. Materials & Design,2017,115:348-354.
- [8] 王世博,葛世荣,朱真才,等. 氧化锌晶须增强尼龙复合材料蠕滑特性[J]. 机械工程学报,2010,46(5):63-67.
- [9] LI X B, WEI Y T, FENG Q Z, et al. Mechanical behavior of nylon 66 tyre cord under monotonic and cyclic extension: experiments and constitutive modeling [J]. Fibers and Polymers, 2017, 18(3):542-548.
- [10] 熊杰,唐菊,顾伯洪,等. 芳纶纤维束力学性能的统计本构方程[J]. 纺织学报,2003,24(4):26-28,4.
- [11] HINO O. The calculation of the tensile properties of rubber using molecular dynamics [J]. International Polymer Science and Technology,2017,44(2):21-28.

收稿日期:2021-12-20