

# 基于 Cosserat 模型和位置动力学的柔性线缆实时仿真

陈文强,张丹,朱锡生,左敦稳  
(南京航空航天大学 机电学院,江苏 南京 210016)

**摘要:**为提高基于 Cosserat 弹性杆模型的柔性线缆仿真精度和实时性要求,提出一种将 Cosserat 弹性杆模型和位置动力学结合的方法,采用 Cosserat 弹性杆模型描述线缆的形变特性,在经典 PBD 框架下加入线缆离散单元方向变量,将线缆离散 Cosserat 模型的拉伸-剪切和弯曲-扭转应变约束作为约束函数扩展到 PBD 框架中,以此来进行约束投影,实现线缆空间位姿的实时求解,并通过实例验证了该方法的可行性。

**关键词:**柔性线缆;物性仿真;Cosserat 弹性杆;PBD

**中图分类号:**TP391.9 **文献标志码:**A **文章编号:**1671-5276(2023)03-0074-05

## Realtime Simulation of Flexible Cable Based on Cosserat Model and Position Based Dynamics

CHEN Wenqiang, ZHANG Dan, ZHU Xisheng, ZUO Dunwen  
(College of Mechanical and Electrical Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract:** In order to improve the simulation accuracy and real-time standard of flexible cables based on the Cosserat elastic rod model, this paper proposes a method combining the Cosserat elastic rod model with position dynamics. The Cosserat elastic rod model is used to describe the deformation characteristics of the cable. The cable discrete element direction variable is added under the PBD framework, and the tensile-shear and bending-torsional strain constraints of the cable discrete Cosserat model are extended to the PBD framework as constraint functions, so as to carry out constraint projection and realize the real-time solution of the cable space pose, and the feasibility of the proposed method is verified by examples.

**Keywords:** flexible cable; physical simulation; Cosserat elastic rod; PBD

## 0 引言

线缆广泛应用于复杂机电产品中电气元件、设备以及控制装置的连接,是传递信号和能量的载体。作为机电产品的重要组成部分,线缆的布局设计和装配直接影响了机电产品的性能。近年来,基于物性模型的线缆敷设和装配仿真可以预先检测和解决线缆装配操作中可能出现的问题,得到研究人员的重视<sup>[1]</sup>。

目前较为常用的线缆物性建模方法有:质点-弹簧法<sup>[2]</sup>、刚性链法<sup>[3]</sup>、有限元法<sup>[4]</sup>和弹性杆非线性力学法<sup>[5]</sup>。质点-弹簧法、刚性链法求解效率很高,但线缆中心线的拉伸应变和剪应变都无法反映,因此真实性欠缺;有限元法虽然精度高,但随着离散网格数量的增加,求解效率低,难以满足虚拟装配的实时性。Cosserat 弹性杆是在 Kirchhoff 弹性杆的基础上,进一步考虑了杆的轴向应变和弯曲剪应变等因素,因此模型更加精确。

在确定了线缆的 Cosserat 弹性杆模型之后,需根据力学的基本原理建立起力学模型与系统运动的关系,即动力

学微分方程。线缆的动力学微分方程建立主要依赖牛顿运动定律和拉格朗日动力学方法。求解动力学微分方程的方法主要包括打靶法<sup>[6]</sup>、牛顿法<sup>[7]</sup>,这些方法对初值的要求较高,只有初始值和最优解足够接近时,才能取得较好的收敛效果。GRÉGOIRE M 等<sup>[8]</sup>由 Cosserat 理论推导出线缆的弹性势能表达式,考虑到牛顿法对初值的敏感性,于是在一次求解过程中顺序使用牛顿法、非线性共轭梯度法、线性共轭梯度法、最速下降法和一维搜索法。林海立等<sup>[9]</sup>对常用求解方法的收敛性进行对比,选择信赖域方法进行求解,该算法为全局收敛方法,对初值要求不高,并通过 GPU 加速,获得了较好的求解效率。

基于 Cosserat 理论的线缆物性模型由于考虑了更多的形变因素,因而在模型的真实性和提升,但在求解方面,一般得到的动力学方程为偏微分方程组,存在非线性偏微分方程组的精确解较难获得,经离散处理后变量太多导致初值难以给定等问题。针对以上问题,提出在改进 PBD 框架下实现线缆的动态仿真方法,以期在对敷设过程中线缆的形变进行真实模拟的基础上提高求解效率,满足实时交互的要求。

**基金项目:**国家自然科学基金项目(51705246)

**第一作者简介:**陈文强(1996—),男,湖北黄冈人,硕士研究生,研究方向为增强现实装配。

## 1 柔性线缆的 Cosserat 弹性杆模型

Cosserat 弹性杆理论将弹性杆的空间位姿视作刚性截面沿中心线的移动和转动,为了对弹性杆的空间位姿进行定量分析,引入以下分析框架。以空间中一固定点  $O$  建立参考坐标系  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , 线缆中心线  $r(s): [s_0, s_1] \rightarrow R^3$ ,  $s$  为线缆中心线的弧坐标,如图 1 所示。

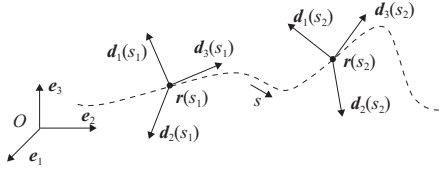


图 1 Cosserat 弹性杆基本坐标描述框架

在曲线上任意一点可定义一个依附于中心线的右手系  $\{d_1(s), d_2(s), d_3(s)\}$  称为主轴坐标系,其中每一个基向量称为方向向量。其基矢量满足  $d_3(s) = d_1(s) \times d_2(s)$ , 并规定  $d_1(s)$  和  $d_2(s)$  在弧坐标  $s$  处横截面中,  $d_3(s)$  沿着该处中心线的切线方向。从而柔性线缆的剪切、拉压、扭转以及弯曲变形得以在 Cosserat 模型中反映出来。

### 1.1 线缆弯曲-扭转应变

基于上述分析框架,便可以通过主轴坐标系沿中心线的移动描述线缆的形变状态。在微分几何中, Darboux 矢量用来进行坐标系旋转的参数化描述,利用 Darboux 矢量来描述线缆的弯曲和扭转变形:

$$\Omega(s) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 d_k(s) \times d'_k(s) \quad (1)$$

式中  $d'_k$  表示方向向量对弧坐标的微分。中心线上任意一点处的 Darboux 矢量是该点处主轴坐标系的角位移对弧坐标  $s$  的变化率。与刚体角速度的概念类似,不同的是角位移是对时间  $t$  的变化率。Darboux 矢量等价于动点沿着中心线沿弧坐标正向以单位速度做匀速运动时主轴坐标系的角速度。在 Cosserat 弹性杆理论中, Darboux 矢量在方向向量上的投影被用来衡量中心线的弯曲和扭转变形:

$$\Omega(s) = \Omega_1(s) d_1(s) + \Omega_2(s) d_2(s) + \Omega_3(s) d_3(s) \quad (2)$$

式中分量  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  表示主轴坐标系围绕截面方向  $d_1$  和  $d_2$  旋转的程度,表示线缆的弯曲应变,如图 2 所示。

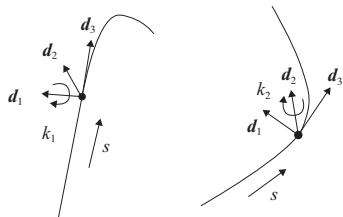


图 2 线缆的弯曲应变

分量  $\Omega_3$  表示主轴坐标系围绕切线  $d_3$  旋转的程度,用来表示扭转应变,如图 3 所示。

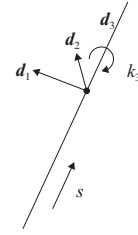


图 3 线缆的扭转应变

考虑到欧拉角的奇点位置,在计算中对 Darboux 矢量采用四元数进行参数化。

$$\Omega(s) = 2\bar{q}q' \quad (3a)$$

展开式为

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -\lambda_1 \lambda'_0 + \lambda_0 \lambda'_1 + \lambda_3 \lambda'_2 - \lambda_2 \lambda'_3 \\ -\lambda_2 \lambda'_0 - \lambda_3 \lambda'_1 + \lambda_0 \lambda'_2 + \lambda_1 \lambda'_3 \\ -\lambda_3 \lambda'_0 + \lambda_2 \lambda'_1 - \lambda_1 \lambda'_2 + \lambda_0 \lambda'_3 \end{bmatrix} \quad (3b)$$

式中  $\bar{q}, q'$  分别为旋转四元数  $q = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$  的共轭四元数和对弧坐标  $s$  的微分。通过当前状态  $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$  和初始状态  $(\Omega_1^0, \Omega_2^0, \Omega_3^0)$  之间的差值来衡量应变,  $(\Omega_1 - \Omega_1^0)$  和  $(\Omega_2 - \Omega_2^0)$  表示弯曲应变大小,  $(\Omega_3 - \Omega_3^0)$  而表示扭转应变大小,即

$$\Delta\Omega = \Omega - \Omega^0 = 2(\bar{q}q' - \bar{q}^0 q'^0) \quad (4)$$

### 1.2 线缆拉伸-剪切应变

实际上,当弹性杆中心线的切线具有单位长度,弹性杆中心线的切向矢量  $\partial_s r(s)$  不一定与刚性横截面法线  $d_3$  平行,此时弹性杆就会受到剪切变形的影响。其次如果弹性杆中心线的切向量不是单位向量,弹性杆就会产生拉伸变形。因此采用矢量  $\Gamma$  来表示弹性杆的拉伸-剪切变形:

$$\Gamma(s) = \partial_s r(s) - d_3(s) \quad (5)$$

$\Gamma$  衡量中心线偏离其非拉伸和非剪切静止姿势的程度。如果弹性杆中心线的切线和横截面的法线平行并相等,则  $\Gamma$  消失。这意味着不施加剪切力,并且由于  $\|d_3(s)\| = 1$ ,此时线缆未拉伸或压缩。

当  $\Gamma$  消失时,确定 Darboux 矢量分量随弧坐标  $s$  的变化规律,结合式(3b)可以解出欧拉参数的变化规律,就可以确定线缆的空间位姿。如图 4 所示,给定线缆长度  $L = 1$  m,  $r(0) = 0$ , 选择四元数初值为  $q(0) = [1, 0, 0, 0]^T$ , 当  $\Omega(s) = (2, 0, 5)^T$  时,图中黑色粗实线为线缆的中心线,由  $\{d_1(s), d_2(s), d_3(s)\}$  组成的主轴坐标系表示该点截面的方向。

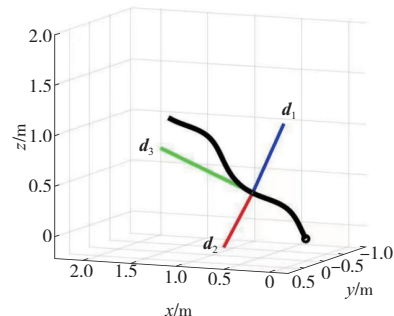


图 4 柔性线缆的空间位姿表示

## 2 线缆模型的离散化处理

由于 PBD 是一种通过对离散粒子系统受力分析的方式来获得柔性体仿真的技术,因此为了将连续 Cosserat 弹性杆理论引入到 PBD 框架下,首先要将线缆进行离散处理,得到如图 5 所示的线缆离散模型,离散化后便可以基于 Cosserat 理论导出相应的弹性杆约束。

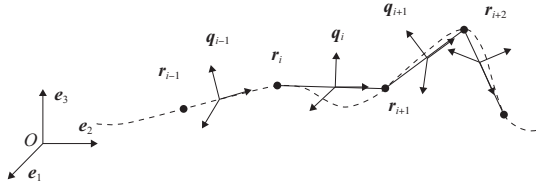


图 5 柔性线缆离散模型

图 5 中线缆的中心线被离散为  $N$  个离散点和  $N-1$  离散单元,线缆中心线的空间位姿就由这些离散点在世界坐标系中的坐标进行描述,由矢量  $\mathbf{r}(s_i) = [x(s_i), y(s_i), z(s_i)]^T$  所确定。每一个离散单元由两个离散点和一个主轴坐标系组成,主轴坐标系被参数化为一个旋转四元数,该四元数描述了当前坐标系相对于初始坐标系的三维空间旋转量。

由于离散模型中仅给出了离散位置上的坐标和截面姿态,需要由这些信息描述其余各点处的坐标和截面姿态以及它们对于弧坐标的变化率,以用于计算线缆的  $\Omega$  和  $\Gamma$  约束矢量。在离散点  $i$  和离散点  $i+1$  之间中心线上各点处,世界坐标系原点到该点的矢量对于弧坐标的变化率  $\mathbf{r}'(s_i)$  可以通过两个连续节点之间的差分来近似:

$$\mathbf{r}'(s_i) \approx \frac{\mathbf{r}(s_i + ds_i) - \mathbf{r}(s_i)}{ds_i} = \frac{\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i}{ds_i} \quad (6)$$

式中  $ds_i$  为离散点  $i$  和离散点  $i+1$  之间的线缆段的变形后长度,  $ds_i = \|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i\| \approx L/(N-1)$ 。由于线缆在变形前后的长度变化量相比于其长度可以忽略不计,因此在计算时用其原始长度近似变形后的长度,并记  $L/(N-1) = 1/l$ 。

离散点  $i$  和离散段  $i+1$  中点之间的各截面相对世界坐标系的转角对于弧坐标变化率为

$$q'_i = \frac{q_{i+1} - q_i}{ds_i} \quad (7)$$

式中  $ds_i = 1/2(\|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i\| + \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}\|) \approx 1/l$ 。

为了计算简便,将离散段  $i$  和离散段  $i+1$  中点之间的各截面相对世界坐标系的转动近似表示为

$$\bar{q}_i = \frac{\bar{q}_{i+1} + \bar{q}_i}{2} \quad (8)$$

则离散 Darboux 矢量为

$$\Omega_i \approx \frac{1}{l} \mathbf{I}((\bar{q}_i + \bar{q}_{i-1})(q_i - q_{i-1})) \frac{2}{l} \mathbf{I}(\bar{q}_{i-1} q_i) \quad (9)$$

式中:  $\mathbf{I}(q)$  表示旋转四元数  $q$  的虚部,即  $\mathbf{I}(q) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$ 。则弯曲和扭转应变大小为

$$\Delta \Omega_i \approx \frac{2}{l} \mathbf{I}(\bar{q}_{i-1} q_i - \bar{q}_{i-1}^0 q_i^0) \quad (10)$$

同理,拉伸和剪切应变矢量离散约束表达式为

$$\Gamma_i \approx \frac{1}{l} (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i) - \mathbf{I}(q_i \mathbf{e}_3 \bar{q}_i) \quad (11)$$

## 3 基于 PBD 算法的线缆位姿求解

PBD 是 MÜLLER M<sup>[10]</sup> 在 2007 年提出的一种基于几何关系变化来模拟对象运动学过程的高效方法,可有效模拟刚体、柔体物体的动态形变过程。传统基于力的仿真方法是通过牛顿第二定律计算出系统的加速度,再通过数值积分计算出速度和位置信息。在 PBD 中,则是先构建系统节点的约束关系,然后通过对约束关系进行投影得出位置信息,并依此更新速度信息。PBD 具有求解速度快、稳定性高等优点,在刚体、非刚体仿真中受到了广泛的应用。

原有的 PBD 框架将物体离散为由位置构成的粒子点集合,本文在此基础上,加入粒子的方向因素,将线缆视作为由位置和方向构成的粒子点集合,采用  $\Omega$  和  $\Gamma$  应变矢量作为 PBD 下的约束函数,以此确定粒子之间的相互关系,实现线缆的动态仿真。

### 3.1 Cosserat 约束函数

为了在 PBD 框架下实现线缆的动态仿真,本文使用离散状态下的应变矢量作为几何约束。首先在忽略了剪切和拉伸应变的情况下,线缆中心线长度不变,即离散单元的长度是一定值。同时由于主轴坐标系的方向矢量  $\mathbf{d}_3$  与中心线的切线方向保持一致,这两类特征被抽象为剪切-伸长约束:

$$C_s(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}) = \frac{N}{L} (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) - \mathbf{R}(q) \mathbf{e}_3 = 0 \quad (12)$$

线缆离散单元是由两个相邻的粒子组成的,它们的位置和方向分别为  $\mathbf{p}_1$  和  $\mathbf{p}_2$  以及四元数  $q$ , 拉伸-剪切约束  $C_s$  最小化了线缆的拉伸和剪切。为了导出 PBD 中的弯曲-扭转约束,通过对相邻四元数进行算术平均插值得到基于杆单元的离散形式,抽象为弯曲-扭转应变约束:

$$C_b(q, u) = \mathbf{I}(\bar{q}u - \bar{q}^0 u^0) = 0 \quad (13)$$

式中  $q$  和  $u$  代表两相邻线缆离散单元上用于描述材质标架的旋转四元数,右上标 0 表示默认状态值。弯曲-扭转约束  $C_b$  最小化了线缆的弯曲和扭转变形。根据式 (12) 和式 (13) 描述的两种矢量约束,在改进的 PBD 框架下可以描述柔性线缆的复杂非线性形变。

### 3.2 仿真算法流程

假设线缆的离散 Cosserat 模型有  $N$  个节点和  $M$  个约束,每个节点包含位置和方向 2 种物理状态。离散点的位置构成位置矩阵  $\mathbf{x}^T = [\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T, \dots, \mathbf{x}_N^T]$ ,  $i \in [1, \dots, N]$ ; 离散点方向构成旋转四元数矩阵  $\mathbf{q}^T = [q_1^T, q_2^T, \dots, q_N^T]$ ,  $j \in [1, \dots, N]$ 。给定仿真时间步长  $\Delta t$ , 算法步骤如下。

1) 初始化所有节点的初始位置和方向,位置  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i^0$ , 速度  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^0$  以及  $\mathbf{w}_i$ , 式中  $\mathbf{w}_i$  为粒子质量的倒数; 方向  $q_j = q_j^0$ , Darboux 矢量  $\Omega_j = \Omega_j^0$  以及转动惯量矩阵  $\mathbf{I}_j = \mathbf{I}_j^0$ 。

2) 在时间步长  $\Delta t$  下,遍历所有的节点,根据节点受力情况计算节点的速度  $\mathbf{v}_i(t)$  以及 Darboux 矢量  $\Omega_j(t)$ 。

$$\mathbf{v}_i(t) = \mathbf{v}_i(t - \Delta t) + \Delta t \mathbf{w}_i \mathbf{f}_{\text{ext}}[\mathbf{x}_i(t - \Delta t)] \quad (14a)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_j(t) = \boldsymbol{\Omega}_j(t-\Delta t) + \Delta t \boldsymbol{I}_j^{-1} \{ M_{\text{ext}} - \boldsymbol{\Omega}_j(t-\Delta t) \times [ \boldsymbol{I}_j \boldsymbol{\Omega}_j(t-\Delta t) ] \} \quad (14b)$$

3) 以此来计算节点的预测位置和方向:

$$\boldsymbol{x}_i^{\text{pre}} = \boldsymbol{x}_i + \Delta t \boldsymbol{v}_i(t) \quad (15a)$$

$$\boldsymbol{q}_j^{\text{pre}} = \boldsymbol{q}_j + 0.5 \Delta t \boldsymbol{q}_j \boldsymbol{\Omega}_j \quad (15b)$$

4) 预测位置  $\boldsymbol{x}_i^{\text{pre}}$  和方向  $\boldsymbol{q}_j^{\text{pre}}$  作为约束投影中的输入, 使用 Gauss-Seidel 求解器对每个节点约束投影, 并对节点的预测位置和方向进行适当的更新, 得到更新后的状态。

$$\boldsymbol{x}_i^* = \boldsymbol{x}_i^{\text{pre}} + \Delta \boldsymbol{p}_i \quad (16a)$$

$$\boldsymbol{q}_j^* = \boldsymbol{q}_j^{\text{pre}} + \Delta \boldsymbol{p}_{i+j} \quad (16b)$$

$$\Delta \boldsymbol{p} = -\boldsymbol{W} \nabla \boldsymbol{C}(\boldsymbol{p})^T (\nabla \boldsymbol{C}(\boldsymbol{p}) \boldsymbol{W} \nabla \boldsymbol{C}(\boldsymbol{p})^T)^{-1} \boldsymbol{C}(\boldsymbol{p}) \quad (17)$$

式中  $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{p})$  为约束函数, 即弯曲-扭转应变约束和剪切-伸长约束。质量与转动惯量倒数构成的对角矩阵  $\boldsymbol{W}$  的表达式为

$$\boldsymbol{W} = \text{diag}[m_1^{-1}, \dots, m_i^{-1}, \boldsymbol{I}_1^{-1}, \dots, \boldsymbol{I}_j^{-1}] \quad (18)$$

5) 再次遍历所有的节点, 按照式 (19) 和式 (20) 对其位置和方向进行更新:

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_i(t) = [\boldsymbol{x}_i^* - \boldsymbol{x}_i(t-\Delta t)] / \Delta t \quad (19)$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{p}_i$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_j(t) = 2\tilde{\boldsymbol{q}}_j \boldsymbol{q}_j^* / \Delta t \quad (20)$$

$$\tilde{\boldsymbol{q}}_j(t) = \boldsymbol{q}_j^*$$

6) 以  $\tilde{\boldsymbol{v}}_i(t)$ 、 $\tilde{\boldsymbol{x}}_i$ 、 $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_j$  和  $\tilde{\boldsymbol{q}}_j$  作为输入, 返回步骤 1), 开始下一时间步长的计算。

## 4 线缆仿真实例验证

本文方法的实现基于 Cosserat 物理属性的柔性线缆动态仿真, 在 Ubuntu16.04 下利用 OpenGL 渲染实现。以某一电气设备的柔性线缆为例, 给定线缆几何及物理参数如表 1 所示。

表 1 线缆仿真参数

主要参数	数值
线缆长度 $L/\text{m}$	1.00
线缆直径 $D/\text{m}$	0.05
离散质点数 $N$	50
质点及离散单元质量 $M/\text{kg}$	1.0
弹性模量/MPa	$1.0 \times 10^5$
切变模量/MPa	$1.0 \times 10^5$
抗弯刚度/ $(\text{N} \cdot \text{mm}^2)$	$0.1 \times 10^6$
抗扭刚度/ $(\text{N} \cdot \text{mm}^2)$	$0.5 \times 10^6$

基于以上线缆的几何和物理参数, 就可以求解出线缆的空间位姿。本文采用 PBD 的方法只需初始化线缆的状态, 即给定离散质点的空间位置和方向四元数的初值, 较之于偏微分方程组的初值更加直观, 确认难度较小。以下分别对一端固定一端自由的单根线缆在重力下的运动、在外力及外力矩的单根线缆和空间形态进行仿真分析。假设线缆固定端为线缆起点, 另一端不受约束, 质点初始化坐标为  $\boldsymbol{x} = [0, 0.02 \times 1, \dots, 0.02 \times 50]$ , 其他两个方向坐标均

为 0; 方向四元数全部为  $[0.7, 0, 0.7, 0]^T$ , 线缆在重力作用下运动如图 6 所示。

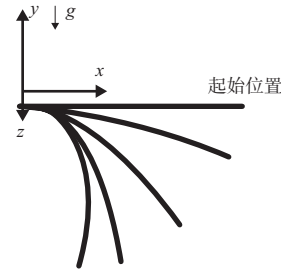
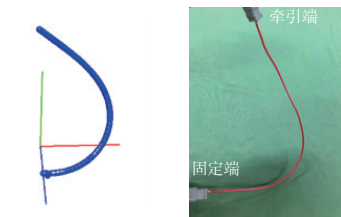
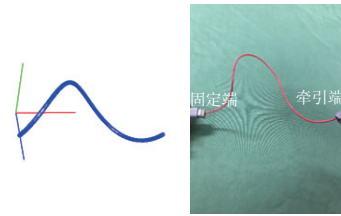


图 6 一端固定重力作用下线缆的运动

为验证模型求解的准确性, 给出柔性线缆在实际装配中出现的空间位姿形态, 与建立的物性模型进行对比。如图 7 所示。



(a) 线缆弯曲变形



(b) 线缆扭转变形

图 7 线缆弯曲-扭转变形

由图 7 可知, 基于 PBD 算法求解的 Cosserat 弹性杆理论的线缆动力学仿真具有较高的真实性, 建立的物性模型能够很好地反映线缆在实际敷设过程中的变形, 能够满足实际工程中的需要。

为了验证 PBD 算法的求解效率满足实时性要求, 在线缆长度  $L = 1 \text{ m}$ , 其他参数不变的情况下, 对具有不同离散质点数目的线缆物性模型进行求解, 并将其与牛顿法等联合方法和信赖域法求解进行对比, 各算法的求解效率如图 8 所示。

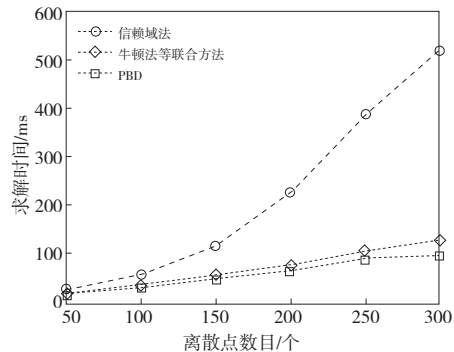


图 8 平均求解时间与离散质点个数关系

由图 8 可知,3 种方法的求解效率均随着离散点数目的增多逐渐降低,其中信赖域法虽然对于初值设定不敏感,但是求解效率最低,而且随着计算规模的增大,求解耗时急剧增大。牛顿法等联合方法和 PBD 方法的求解效率高,但是牛顿法等联合方法的初值设定困难,容易产生不收敛的情形,本文所提出的 PBD 方法具有最好的求解效率,同时对计算规模的敏感度最小,针对较大计算规模的线缆仿真问题,求解时间也能保持在 100 ms 以内。因此该方法能够保证对线缆的形变进行真实模拟的同时,可以满足实际敷设过程中的实时性要求。

## 5 结语

本文在 Cosserat 弹性杆模型的基础之上,提出一种结合 PBD 算法的柔性线缆实时仿真方法。

1) 该方法首先在 Cosserat 理论下导出线缆的拉伸-剪切、弯曲-扭转变形的形变矢量,并将形变矢量进行四元数参数化,实现了模型中形变约束的一致性。

2) 对连续线缆模型进行离散化处理,采用 PBD 算法进行线缆空间位姿的计算,该方法避免了求解复杂的偏微分动力学方程组,通过约束投影的方式更新线缆离散节点和离散单元的空间状态,并通过实例验证了该物性模型能够模拟线缆扭转和弯曲变形。

3) 为了验证采用 PBD 方法的计算效率,给出在不同离散点数目下的线缆位姿求解时间,并与牛顿法等联合方法和信赖域法进行对比,结果表明:使用改进 PBD 算法可以取得较好的效率,在长度为 1 m、离散点数目小于 300 时,改进 PBD 算法将求解时间维持在 100 ms 以内,可以满足虚拟环境下线缆敷设仿真的实时性要求。

## 参考文献:

- [1] LV N J, LIU J H, XIA H X, et al. A review of techniques for modeling flexible cables [J]. *Computer-Aided Design*, 2020, 122:102826.
- [2] LV N J, LIU J H, DING X Y, et al. Physically based real-time interactive assembly simulation of cable harness [J]. *Journal of Manufacturing Systems*, 2017, 43:385-399.
- [3] BENDER J, ERLEBEN K, TRINKLE J. Interactive simulation of rigid body dynamics in computer graphics [J]. *Computer Graphics Forum*, 2014, 33(1):246-270.
- [4] ZHANG Y, CHEN D S, QIAN H L. Computational method for the deformation mechanism of non-prestressed cable net structures based on the vector form intrinsic finite element method [J]. *Engineering Structures*, 2021, 231:111788.
- [5] JAWED M K, NOVELIA A, O'REILLY O M. A primer on the kinematics of discrete elastic rods [M]. Cham: Springer International Publishing, 2018.
- [6] 刘检华,赵涛,王春生,等. 虚拟环境下的活动线缆物理特性建模与运动仿真技术[J]. *机械工程学报*, 2011, 47(9):117-124.
- [7] 王泽怡. 基于粘弹性杆模型的柔性电缆装配验证[D]. 大连:大连海事大学, 2020.
- [8] GRÉGOIRE M, SCHÖMER E. Interactive simulation of one-dimensional flexible parts [J]. *Computer-Aided Design*, 2007, 39(8):694-707.
- [9] 林海立,刘检华,唐承统,等. 基于 Cosserat 弹性杆理论的柔性线缆物理建模方法[J]. *图学学报*, 2016, 37(1):34-42.
- [10] MÜLLER M, HEIDELBERGER B, HENNIX M, et al. Position based dynamics [J]. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 2007, 18(2):109-118.

收稿日期:2021-12-14

(上接第 49 页)

3) 进口  $Ma=0.78$  时,尾板角度调节改变了其上的流动分离进而改变了相邻叶栅的进气攻角,实验中有必要根据流场特征同时调节上、下尾板角度以获得周期性流场。进口  $Ma=0.86$  时尾板角度对周期性影响较小。

## 参考文献:

- [1] 高丽敏,蔡明. 压气机叶型的风洞试验研究[J]. *风机技术*, 2018, 60(4):9-15.
- [2] BUFFUM D H, FLEETER S. Wind tunnel wall effects in a linear oscillating cascade [C]//*Proceedings of ASME 1991 International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exposition*, Orlando, Florida, USA: 2015.
- [3] SONG B, GUI X M, LI S M, et al. Flow periodicity improvement in a high speed compressor cascade with a large turning-angle [C]//38th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit. Indianapolis, Indiana. Reston, Virginia: AIAA, 2002:3539.
- [4] LEPICOVSKY J, CHIMA R V, MCFARLAND E R, et al. On flowfield periodicity in the NASA transonic flutter cascade [J]. *Journal of Turbomachinery*, 2001, 123(3):501-509.

- [5] RONA A, PACIORRI R, GERON M. Design and testing of a transonic linear cascade tunnel with optimized slotted walls [J]. *Journal of Turbomachinery*, 2006, 128(1):23-34.
- [6] TIAN S M, PETRIE-REPAR P, GLODIC N, et al. CFD-aided design of a transonic aeroelastic compressor rig [J]. *Journal of Turbomachinery*, 2019, 141(10):101003.
- [7] 时瑞超,王丁喜,黄秀全. 平面叶栅试验台周期特性数值模拟研究 [C]//中国航天第三专业信息网第四十届技术交流会暨第四届空天动力联合会议,昆明, 2019: 91-96.
- [8] 杨泳,徐开俊,李珊珊,等. 平面叶栅周期性特性数值研究 [J]. *液压与气动*, 2018(9):92-97.
- [9] 罗金汉,孙鹏,傅文广,等. 导流板抽吸对扇形叶栅实验件流场的周期性影响 [J]. *热能动力工程*, 2018, 33(2):61-68.
- [10] 陈宇,徐惊雷,黄帅,等. 平面叶栅尾流板开孔率对跨声速涡轮叶栅流道影响的数值分析 [J]. *航空动力学报*, 2018, 33(1):209-214.
- [11] 徐文峰,孙鹏,黄龙盛,等. 扇形叶栅结构设计与应用研究 [J]. *工程热物理学报*, 2021, 42(4):875-885.

收稿日期:2022-01-04