

含动态齿侧间隙的齿轮系统稳定性研究

李扬¹,朱佳博¹,李伟²,黄静秋³

(1. 陕西铁路工程职业技术学院,陕西 渭南 714099; 2. 潞安化工新材料有限公司,山西 太原 030400;
3. 江麓机电集团有限公司,湖南 湘潭 411199)

摘要:以单级直齿轮传动系统为研究对象,建立包含时变啮合刚度、综合误差、齿侧间隙的横-扭-摆耦合10自由度非线性动力学模型。详细推导并计算齿轮啮合过程中间隙、压力角和中心距的动态数值;利用Lyapunov指数法研究齿侧间隙与系统稳定性的关系;结合分岔图和庞加莱映射图,研究齿侧间隙对系统振动特性的影响。研究表明:工况一定时,随着齿侧间隙不断增大,系统通过分岔和激变从单周期响应过渡到混沌,且通过分析得到了间隙的取值范围,为工程设计提供了理论指导。

关键词:非线性模型;Lyapunov指数法;齿侧间隙;振动特性

中图分类号:TH132.41 **文献标志码:**A **文章编号:**1671-5276(2023)03-0016-04

Research on Stability of Gear System with Dynamic Backlash

LI Yang¹, ZHU Jiabo¹, LI Wei², HUANG Jingqiu³

(1. Shaanxi Railway Engineering Vocational and Technical College, Weinan 714099, China;
2. Lu'an New Chemical Material Co., Ltd., Taiyuan 030400, China;
3. Jianglu Machinery Electronics Group Co., Ltd., Xiangtan 411199, China)

Abstract: With a single-stage spur gear transmission system as the reserch object, a 10-degree-of-freedom nonlinear dynamic model of transverse-torsion-pendulum coupling including time-varying meshing stiffness, comprehensive error and tooth backlash is established. The dynamic values of clearance, pressure angle and center distance during the gear meshing process are deduced and calculated in detail, Lyapunov exponent method is applied to study the relationship between the tooth side clearance and the system stability, and by combining the bifurcation diagram and the Poincaré map, the influence of the tooth backlash on the vibration characteristics of the system is studied. The research shows that the system, under certain working conditions, transits from a single-period response to chaos through bifurcation and sudden changes as the tooth side clearance increases, and through the analysis, the value range of the clearance is obtained, which provides theoretical guidance for engineering design.

Keywords: non-linear model; Lyapunov exponent method; flank clearance; vibration characteristics

0 引言

齿轮作为一种重要的动力和运动传递装置,在各类机械设备中都有广泛的应用,其振动特性会直接影响到设备的运行性能和使用寿命,因而很有必要进行齿轮动力学研究。在建模过程中,部件的自由度逐渐增加,从纯扭转动力学模型^[1-2]到横扭耦合动力学模型^[3-5],再到三维全自由度动力学模型^[6-8];盛冬平等^[9]在研究过程中建立起一种直齿轮副振动模型,在一定仿真分析基础上讨论了系统分叉特性和转速、齿侧间隙参数的关系。以上研究都是基于定值参数进行分析的,实际上,齿轮的啮合角、间隙和时变刚度等啮合参数在一定程度上会受到中心距变化的影响^[10]。KIM W等^[11]选择行星齿轮传动系统进行研究,进行对比分析而确定出中心距改变情况下这种传动过程中啮合角的变化情况,但在研究时未考虑到间隙。CHEN S Y等^[12]则具体讨论了间隙和中心距的相关性,与此同时还

根据问题特征而引入准静态模型。王成等^[13]建立了齿轮传动系统的动态参数多自由度动力学模型,并分析了动态参数对系统的啮合刚度影响。

随着高精度数值计算技术的广泛应用,一些学者在齿轮传动系统研究过程中也引入了这种技术,且建立相应的非线性动力系统模型对这方面问题进行讨论,主要是在模拟仿真基础上讨论其瞬态、稳态以及混沌特性。在非线性的动力学领域,最常用的非线性动力学分析方法包括相空间、相平面,Poincaré截面和全局分岔图等定性分析方法,还包括分形维数、Lyapunov指数等定量分析方法^[14]。LU J W等^[15]考虑随机装配间隙,采用全局分岔图和最大Lyapunov指数分析了不同参数下齿轮的复杂运动状态。

学者们对单级直齿轮传动系统的振动已经做了大量研究,但是,研究考虑动态参数的多自由度弯扭摆耦合振动系统特性的文献较少。因此,本文在前人研究基础上,建立了包含时变啮合刚度、综合误差、动态齿侧间隙、动态

基金项目:陕西铁路工程职业技术学院2022年科研基金项目(KY2022-23);陕西铁路工程职业技术学院创新团队培育计划项目(KJTD202002)

第一作者简介:李扬(1994—),女,吉林吉林人,助教,硕士,研究方向为机械设计与自动化。

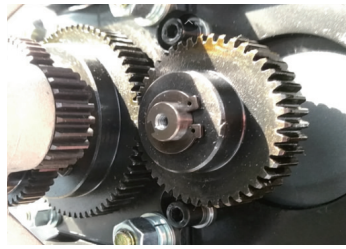
中心距和动态压力角等因素的 10 自由度弯扭耦合非线性振动模型,具体分析了系统非线性振动和动态齿侧间隙的相关性,在一定对比基础上确定出齿侧间隙的经验值,为相关齿轮设计和工程应用提供参考。

1 横-扭-摆耦合非线性动力学模型

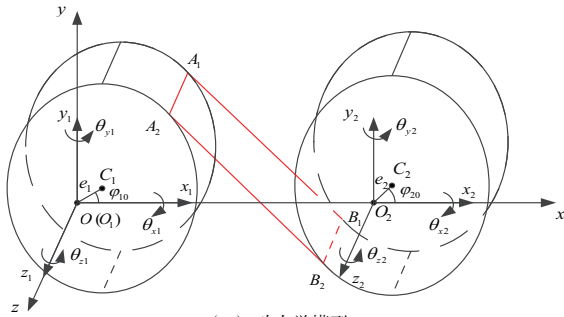
本文以某直行程智能式电动执行器中的关键传动齿轮副为研究对象,具体如图 1(a) 所示。建立齿轮副的横-扭-摆耦合非线性多自由度模型。这种模型主要是针对直齿定轴齿轮传动系统,在模型研究过程中讨论不同因素影响下参数对系统振动的影响,主要因素包括齿轮几何偏心、中心距位移和偏差等,考虑了由几何偏心引起的不平衡惯性力、由旋转轴空间方位改变引起的陀螺力矩等。

渐开线直齿定轴齿轮传动的三维实体模型如图 1(b) 所示。在进行动力学建模时采用如下假设:

- 1) 齿轮轮体为刚体,在运行过程中不会产生挠曲,齿轮副基于啮合面进行耦合;
- 2) 不考虑摆动自由度的影响,在运动过程中啮合面和齿轮基圆一直保持相切;
- 3) 渐开线直齿轮传动过程中,理论条件下不会产生轴向分力,这样为简化处理,而对各齿轮主要考虑到两个横向平移自由度、两个摆动自由度和一个扭转自由度。



(a) 实物图



(b) 动力学模型

图 1 渐开线直齿定轴齿轮传动实体模型

图 1 显示出这种传动系统的三维动力学模型,分析可知其中的坐标系分别为 $O_i x_i y_i z_i$ 、 $Oxyz$,二者分别为局部和固定坐标系。 $A_1 A_2 - B_1 B_2$ 为对应的啮合面。对应的自由度主要包括两个横移自由度 x_i 和 y_i ,两个摆动自由度 θ_{xi} 和 θ_{yi} 以及一个扭转自由度 θ_{zi} 。图中, C_i 为质心; e_i 为偏心距; φ_{i0} 为质心的初始转角。下标 $i=1$ 代表齿轮 1, $i=2$ 代表齿轮 2。

1.1 动态参数计算

定轴齿轮传动三维动力学模型在 Oxy 平面上的二维投影模型如图 2 所示。为便于分析,图中对偏心距和横向

位移均做了放大处理。图中,虚线为初始时刻两齿轮的位置,实线为任意时刻两齿轮的相对位置, $M_1 N_1$ 为任意时刻齿轮的啮合线, L 为任意时刻中心距, α 为任意时刻啮合角, γ 为任意时刻相对位置角。

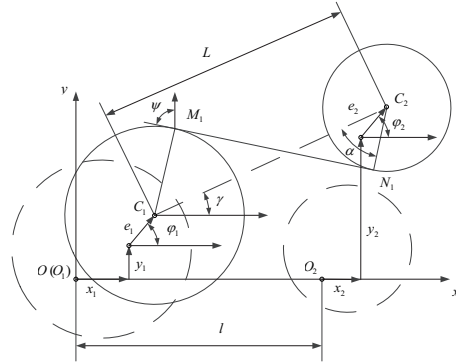


图 2 定轴齿轮传动二维投影模型

分析图 2 可看出,各时刻情况下系 Oxy 中质心 C_1 和 C_2 的位置矢量 R_1 和 R_2 可通过如下表达式确定出:

$$R_1 = (x_1 + e_1 \cos \varphi_1) i + (y_1 + e_1 \sin \varphi_1) j \quad (1)$$

$$R_2 = (x_2 + e_2 \cos \varphi_2) i + (y_2 + e_2 \sin \varphi_2) j \quad (2)$$

式中: i 和 j 分别为固定坐标系 Ox 和 Oy 坐标轴上的单位矢量; φ_1 和 φ_2 分别为各齿轮的转角, $\varphi_1 = \theta_{z1} + \varphi_{10}$, $\varphi_2 = \theta_{z2} + \varphi_{20}$; l 为初始时刻传动轴中心距,考虑加工、装配过程中存在的安装偏差, l 可表示为

$$l = l_s + e_a = \frac{m(z_1 + z_2)}{2} + e_a \quad (3)$$

式中: l_s 为齿轮副的理论中心距; e_a 为中心距偏差; z_1 和 z_2 分别为齿轮 1 和齿轮 2 的齿数; m 为模数。

齿轮副任意时刻的动态中心距为各齿轮质心位置矢量之差的模:

$$L = \|R_2 - R_1\| = \sqrt{(l + \Delta x)^2 + \Delta y^2} \quad (4)$$

式中 Δx 和 Δy 分别为:

$$\Delta x = x_2 + e_2 \cos \varphi_2 - x_1 - e_1 \cos \varphi_1 \quad (5)$$

$$\Delta y = y_2 + e_2 \sin \varphi_2 - y_1 - e_1 \sin \varphi_1 \quad (6)$$

由齿轮副的动态中心距得任意时刻啮合角,即动态啮合角:

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{r_{b1} + r_{b2}}{L} \right) \quad (7)$$

齿轮之间相对位置和啮合压力角的变化会引起齿侧间隙的实时变化,其动态啮合间隙 $\tilde{2}b(t)$ 计算式如下:

$$\tilde{2}b(t) = 2b + 2(r_{b1} + r_{b2}) \cdot [\text{inv}\alpha(t) - \text{inv}\alpha'] \quad (8)$$

1.2 动力学模型

采用拉格朗日法建立定轴齿轮传动横-扭-摆耦合非线性动力学模型,拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad (9)$$

式中: T 、 U 和 V 分别为动能函数、势能函数和耗能函数; q_i 为各自由度的广义坐标, \dot{q}_i 为各自由度的广义速度; Q_i 为除黏性耗散力以外的非保守广义力。

齿轮 1 动力学方程为

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 - m_1 e_1 \dot{\theta}_{z1}^2 \cos(\theta_{z1} + \varphi_{10}) - m_1 e_1 \ddot{\theta}_{z1} \sin(\theta_{z1} + \varphi_{10}) = \\ F_m \sin(\alpha + \gamma) \\ m_1 \ddot{y}_1 - m_1 e_1 \dot{\theta}_{z1}^2 \sin(\theta_{z1} + \varphi_{10}) + \\ m_1 e_1 \ddot{\theta}_{z1} \cos(\theta_{z1} + \varphi_{10}) = -F_m \cos(\alpha + \gamma) \\ J_{x1} \ddot{\theta}_{x1} + J_{z1} \Omega_1 \dot{\theta}_{x1} = -F_m \cos(\alpha + \gamma) \\ J_{y1} \ddot{\theta}_{y1} - J_{z1} \Omega_1 \dot{\theta}_{y1} = -F_m \sin(\alpha + \gamma) \\ (J_{z1} + m_1 e_1^2) \ddot{\theta}_{z1} - m_1 \ddot{x}_1 \sin(\theta_{z1} + \varphi_{10}) + \\ m_1 \ddot{y}_1 \cos(\theta_{z1} + \varphi_{10}) = -F_m r_{b1} \end{cases} \quad (10)$$

齿轮 2 动力学方程为

$$\begin{cases} m_2 \ddot{x}_2 - m_2 e_2 \dot{\theta}_{z2}^2 \cos(\theta_{z2} + \varphi_{20}) - m_2 e_2 \ddot{\theta}_{z2} \sin(\theta_{z2} + \varphi_{20}) = \\ F_m \sin(\alpha + \gamma) \\ m_2 \ddot{y}_2 - m_2 e_2 \dot{\theta}_{z2}^2 \sin(\theta_{z2} + \varphi_{20}) + \\ m_2 e_2 \ddot{\theta}_{z2} \cos(\theta_{z2} + \varphi_{20}) = -F_m \cos(\alpha + \gamma) \\ J_{x2} \ddot{\theta}_{x2} + J_{z2} \Omega_2 \dot{\theta}_{x2} = -F_m \cos(\alpha + \gamma) \\ J_{y2} \ddot{\theta}_{y2} - J_{z2} \Omega_2 \dot{\theta}_{y2} = -F_m \sin(\alpha + \gamma) \\ (J_{z2} + m_2 e_2^2) \ddot{\theta}_{z2} - m_2 \ddot{x}_2 \sin(\theta_{z2} + \varphi_{20}) + \\ m_2 \ddot{y}_2 \cos(\theta_{z2} + \varphi_{20}) = -F_m r_{b2} \end{cases} \quad (11)$$

式中: m_i 、 J_{ji} 分别为主、被动齿轮转动惯量; x_i 、 y_i 则对应于齿轮运动过程中的振动位移; θ_{ji} ($i=1, 2; j=x, y, z$) 为绕各轴线的扭转振动位移; e_i 为齿轮偏心量。

2 含动态参数的齿轮系统振动特性

对这种齿轮传动系统进行理论分析可知,其对应的运动形态相对复杂,主要包括 4 种,分别为周期、倍周期、拟周期及混沌运动。这 4 种不同的运动形式具有各自的特点,在非线性动力学领域,一般采用时间历程、谱分析,相空间、相平面, Poincaré 截面和 Lyapunov 指数等方法来判断非线性系统的运动形式。

Lyapunov 指数定义为在相空间中两条相邻轨迹间的距离随时间的平均指数发散率,它是一种定量判断系统混沌与否最可靠的方法。最大 Lyapunov 指数基于定义法进行分析,相应的计算流程为:

- 1) 设置适宜的长度标准,由于 Lyapunov 指数主要是描述相邻轨道相关性,因而此长度标准应尽可能小;
- 2) 对系统基于长度标准的扰动量进行初始扰动处理,对应的矢量表示为 \mathbf{d}_0 ;
- 3) 经 Δt 后,相应的扰动矢量为 \mathbf{d}_{01} ,从理论上分析可知其方向和大小都出现明显变化,在计算时为避免出现不收敛问题,且控制 \mathbf{d}_{01} 的方向固定,大小一直保持为标准长度,设置的初始扰动为 \mathbf{d}_1 ;
- 4) 进一步观察 \mathbf{d}_1 的变化情况,经过时间步长 Δt 后, \mathbf{d}_1 变为 \mathbf{d}_{11} ,始终保持 \mathbf{d}_1 的方向和大小都不变,然后设置 \mathbf{d}_2 作为新的初始扰动矢量;
- 5) 按上述步骤如此反复下去,经过 k 步迭代以后,得到扰动矢量 \mathbf{d}_k 。

经过上述步骤,可得到系统的最大 Lyapunov 指数 $L_{E,\max}$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t-t_0} \ln \left[\frac{\|\Delta \mathbf{X}(t)\|}{\|\Delta \mathbf{X}(t_0)\|} \right] = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(k+1)\Delta t} \ln \left[\frac{\|\mathbf{d}_{01}\|}{\|\mathbf{d}_0\|} \cdot \frac{\|\mathbf{d}_{11}\|}{\|\mathbf{d}_1\|} \cdot \frac{\|\mathbf{d}_{21}\|}{\|\mathbf{d}_2\|} \cdot \dots \cdot \frac{\|\mathbf{d}_{k1}\|}{\|\mathbf{d}_k\|} \right] = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(k+1)\Delta t} \sum_{i=0}^k \ln \left[\frac{\|\mathbf{d}_{i1}\|}{\|\mathbf{d}_i\|} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

现有研究表明,齿轮传动系统的运动稳定性受齿轮副的侧隙影响很大,由于齿侧间隙参数设计的不同,会导致齿轮系统的非线性运动状态不同。相关研究结果表明,在特定情况下,对侧隙参数进行适当的设定,系统的运行平稳性也能得到提高。因而本文研究过程中具体分析齿侧间隙参数和齿轮系统稳定性的相关性。

以单级齿轮传动装置为例,齿轮副详细参数见表 1。本节中引入传递误差的分岔图及最大 Lyapunov 指数图对其运动特性稳定性进行评价,传递误差的分岔图如图 3 所示。在计算非线性齿轮传动系统的最大 Lyapunov 指数时,长度标准为 1×10^{-10} ,迭代稳定后齿轮传动系统最大 Lyapunov 指数的曲线如图 4 所示。

表 1 齿轮副参数

参数	数值
齿数 Z	$Z_1 = 45; Z_2 = 31$
模数 m/mm	4
质量/kg	$m_1 = 12.75; m_2 = 7.8$
齿宽 d/mm	45
理论啮合角 $\alpha/(\circ)$	25
理论中心距 L/mm	237

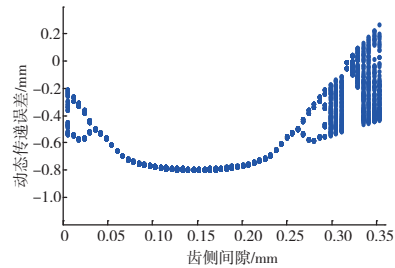


图 3 分岔图

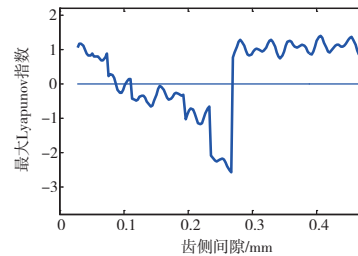


图 4 最大 Lyapunov 指数

由图 3 可以看出,当齿侧间隙 b 在 $[0.046, 0.258]$ mm 范围内时,系统响应为 1 周期运动或拟 1 周期运动;当齿侧间隙 b 变化区间为 $0.258 \text{ mm} \sim 0.281 \text{ mm}$ 的情况下,系统的运动形式为 2 周期、拟 2 周期运动。由此可判断出在此取值区间,系统保持稳定运行。齿侧间隙过大会导致啮合冲击效果更明显,齿侧间隙过小会导致由于齿轮中心距相对变化而

出现卡齿现象从而产生不稳定的运动状态。因此在本研究中把 b 的取值 0.046 mm 和 0.281 mm 作为齿侧间隙的临界点。

齿轮副侧隙参数若临近临界值情况时,受到磨损以及装配误差因素的影响,对应的齿侧间隙也会产生一定的变化,而和设定值出现偏差,这样也会引发系统的失稳问题。因此,针对临界值范围内(即 $0.046\text{ mm} < b < 0.281\text{ mm}$)的齿侧间隙分布方差对齿轮系统稳定性影响进行分析。

在理论状态下,对于齿侧间隙设计值 b 在 $[0.046, 0.281]\text{ mm}$ 范围内时,齿轮系统的运动状态为稳定的。因此,在齿侧间隙设计值为 $b=0.19\text{ mm}$ 以及 $b=0.26\text{ mm}$ 的齿轮系统动力学模型中,驱动转速 1000 r/min 、负载 500 Nm 条件下,图 5 和图 6 分别给出了齿轮 1 和齿轮 2 的 x 方向振动位移的相平面。可以看出,相平面近似于在一个封闭轨道附近做周期运动。结合图 3 和图 4 稳定性分析可知,在设计值为 $b=0.19\text{ mm}$ 的条件下,此时齿轮 1 和齿轮 2 运动状态均为拟 1 周期运动。在设计值为 $b=0.26\text{ mm}$ 的条件下,此时齿轮 1 和齿轮 2 运动状态均为拟 2 周期运动。

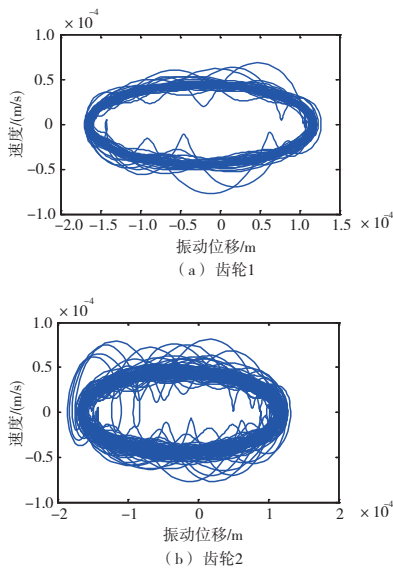


图 5 齿轮系统的相平面 (x 方向, $b=0.19\text{ mm}$)

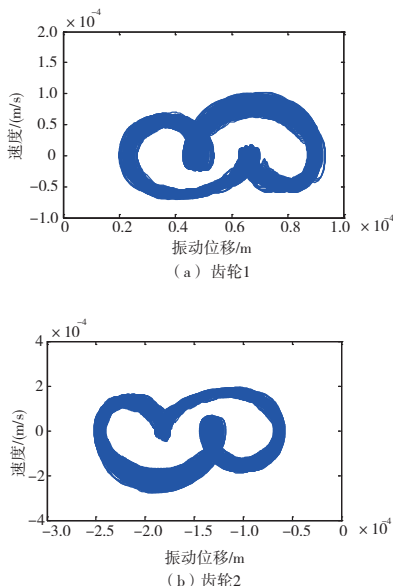


图 6 齿轮系统的相平面 (x 方向, $b=0.26\text{ mm}$)

同时,将电机激励的基频对应周期作为 Poincaré 截面,可分别得到齿侧间隙设计值为 $b=0.19\text{ mm}$ 及 $b=0.26\text{ mm}$ 的齿轮 1 和齿轮 2 的振动位移 Poincaré 映射图,如图 7 和图 8 所示。从图 7 中可以看出,齿侧间隙设计值为 $b=0.19\text{ mm}$ 时,齿轮 1 和齿轮 2 的 Poincaré 映射图特征为较为集中的点域。说明此系统齿轮 1 和齿轮 2 运动状态均为拟 1 周期运动。从图 8 中可以看出,齿侧间隙设计值为 $b=0.26\text{ mm}$ 时,齿轮 1 和齿轮 2 的 Poincaré 映射图特征为离散点域,这些点域较稀疏地分布在一条闭曲面上,再结合图 3,可知齿轮 1 和齿轮 2 运动状态均为拟 2 周期运动。

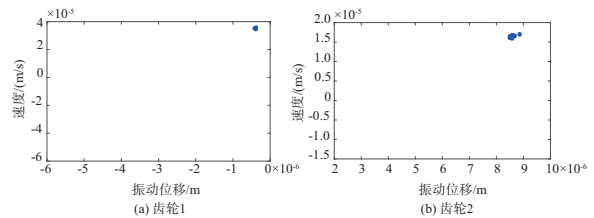


图 7 齿轮系统的 Poincaré 映射图 (x 方向, $b=0.19\text{ mm}$)

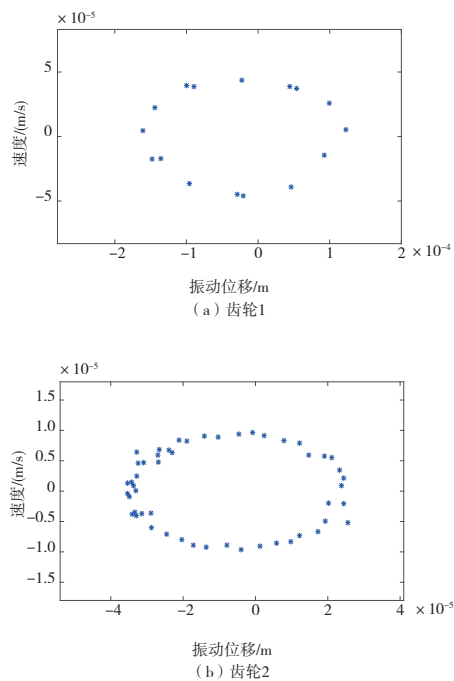


图 8 齿轮系统的 Poincaré 映射图 (x 方向, $b=0.26\text{ mm}$)

上述分析可知,在理论状态下,对于齿侧间隙设计值 b 小于 0.046 mm 或者超过 0.281 mm 的齿轮系统中,齿轮系统的运动状态为非稳定的。又根据 GB 10095—88 齿轮副侧隙设计标准中的单边侧隙设计范围 $[0.115, 0.21]\text{ mm}$,本文中对直齿轮副侧隙设计值取为 $b=0.19\text{ mm}$ 。

3 结语

- 1) 针对齿轮传动系统进行研究,综合考虑时变啮合

(下转第 36 页)

化不显著。

如何减少在这些缺陷的同时提高样品的力学性能需要进一步研究。

参考文献:

- [1] BERMAN B. 3-D printing: the new industrial revolution [J]. Business Horizons, 2012, 55(2): 155-162.
- [2] MESA M C, OLIVIERO P B, LARREA A. Microstructural stability at elevated temperatures of directionally solidified $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Er}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ eutectic ceramics [J]. Journal of Crystal Growth, 2012, 360: 119-122.
- [3] 纪宏超, 张雪静, 裴未迟, 等. 陶瓷3D打印技术及材料研究进展[J]. 材料工程, 2018, 46(7): 19-28.
- [4] CHEN Q, GUILLEMOT G, GANDIN C A, et al. Three-dimensional finite element thermomechanical modeling of additive manufacturing by selective laser melting for ceramic materials[J]. Additive Manufacturing, 2017, 16: 124-137.
- [5] ZHANG L C, ATTAR H, CALIN M, et al. Review on manufacture by selective laser melting and properties of titanium based materials for biomedical applications[J]. Materials Technology, 2016, 31(2): 66-76.
- [6] ZHENG Y, ZHANG K, LIU T T, et al. Cracks of alumina ceramics by selective laser melting [J]. Ceramics International, 2019, 45(1): 175-184.
- [7] HE R X, LIU W, WU Z W, et al. Fabrication of complex-shaped zirconia ceramic parts via a DLP-stereolithography-based 3D printing method[J]. Ceramics International, 2018, 44(3): 3412-3416.
- [8] 张凯, 刘婷婷, 廖文和, 等. 氧化铝陶瓷激光选区熔化成形实验[J]. 中国激光, 2016, 43(10): 126-132.
- [9] LI F Z, ZHANG X W, SUI C Y, et al. Microstructure and mechanical properties of $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-ZrO}_2$ ceramic deposited by laser

direct material deposition [J]. Ceramics International, 2018, 44(15): 18960-18968.

- [10] LAIDOUNE A, LEBBOU K, BAHLOUL D. Microstructure of the yttria doped $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-ZrO}_2$ eutectic fibers grown by the laser heated pedestal growth (LHPG) method[J]. Journal of Crystal Growth, 2013, 380: 224-227.
- [11] FU L S, WANG Z, FU X S, et al. Microstructure and mechanical properties of Y_2O_3 -doped melt-grown $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-ZrO}_2$ eutectic ceramic[J]. Materials Science and Engineering: A, 2017, 703: 372-379.
- [12] LI C, LIU Z Y, FANG X Y, et al. On the simulation scalability of predicting residual stress and distortion in selective laser melting[J]. Journal of Manufacturing Science and Engineering, 2018, 140(4): 1-10.
- [13] ZHANG K, LIU T T, LIAO W H, et al. Influence of laser parameters on the surface morphology of slurry-based Al_2O_3 parts produced through selective laser melting [J]. Rapid Prototyping Journal, 2018, 24(2): 333-341.
- [14] LLORCA J, PASTOR J Y, POZA P, et al. Influence of the Y_2O_3 content and temperature on the mechanical properties of melt-grown $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-ZrO}_2$ Eutectics [J]. Journal of the American Ceramic Society, 2004, 87(4): 633-639.
- [15] QIU Y D, WU J M, CHEN A N, et al. Balling phenomenon and cracks in alumina ceramics prepared by direct selective laser melting assisted with pressure treatment [J]. Ceramics International, 2020, 46(9): 13854-13861.
- [16] LIU Z, SONG K, GAO B, et al. Microstructure and mechanical properties of $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{ZrO}_2$ directionally solidified eutectic ceramic prepared by laser 3D printing[J]. Journal of Materials Science & Technology, 2016, 32(4): 320-325.

收稿日期: 2021-11-26

(上接第19页)

刚度、综合误差、动态齿侧间隙、动态中心距和动态压力角等相关参数,建立了齿轮传动系统的10自由度弯扭耦合非线性振动模型。

2) 推导了齿轮啮合副的动态中心距计算过程,并以此进一步得出了动态齿侧间隙和动态压力角的计算方法。

3) 利用 Lyapunov 指数法、分岔图方法计算了保证系统稳定运行的齿侧间隙范围,并利用 Poincaré 映射和相图分析法验证了齿侧间隙取值的正确性。

4) 齿侧间隙的安装范围应控制在 $[0.046, 0.258]$ mm 之内,以保证系统的平稳运行。

参考文献:

- [1] COMPARIN R J, SINGH R. Non-linear frequency response characteristics of an impact pair [J]. Journal of Sound and Vibration, 1989, 134(2): 259-290.
- [2] KAHRAMAN A, SINGH R. Non-linear dynamics of a spur gear pair[J]. Journal of Sound and Vibration, 1990, 142(1): 49-75.
- [3] ÖZGÜVEN H N. A non-linear mathematical model for dynamic analysis of spur gears including shaft and bearing dynamics[J]. Journal of Sound and Vibration, 1991, 145(2): 239-260.
- [4] KAHRAMAN A, SINGH R. Interactions between time-varying mesh stiffness and clearance non-linearities in a geared system[J]. Journal of Sound and Vibration, 1991, 146(1): 135-156.
- [5] WALHA L, FAKHFAKH T, HADDAR M. Nonlinear dynamics of a two-stage gear system with mesh stiffness fluctuation, bearing flexibility and backlash [J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44(5): 1058-1069.

2009, 44(5): 1058-1069.

- [6] BLANKENSHIP G W, SINGH R. A new gear mesh interface dynamic model to predict multi-dimensional force coupling and excitation[J]. Mechanism and Machine Theory, 1995, 30(1): 43-57.
- [7] ERITENEL T, PARKER R G. Three-dimensional nonlinear vibration of gear pairs [J]. Journal of Sound and Vibration, 2012, 331(15): 3628-3648.
- [8] SONDKAR P, KAHRAMAN A. A dynamic model of a double-helical planetary gear set[J]. Mechanism and Machine Theory, 2013, 70: 157-174.
- [9] 盛冬平, 朱如鹏, 陆凤霞, 等. 多间隙弯扭耦合齿轮非线性振动的分岔特性研究[J]. 振动与冲击, 2014, 33(19): 116-122.
- [10] LI S, KAHRAMAN A. A tribo-dynamic model of a spur gear pair[J]. Journal of Sound and Vibration, 2013, 332(20): 4963-4978.
- [11] KIM W, YOO H H, CHUNG J. Dynamic analysis for a pair of spur gears with translational motion due to bearing deformation [J]. Journal of Sound and Vibration, 2010, 329(21): 4409-4421.
- [12] CHEN S Y, TANG J Y, LUO C W, et al. Nonlinear dynamic characteristics of geared rotor bearing systems with dynamic backlash and friction [J]. Mechanism and Machine Theory, 2011, 46(4): 466-478.
- [13] 王成, 刘辉, 项昌乐. 波动转矩下渐开线直齿轮传动齿廓修形研究[J]. 振动与冲击, 2014, 33(24): 32-38, 53.
- [14] 刘延柱, 陈立群. 非线性振动[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001: 150-156.
- [15] LU J W, CHEN H, ZENG F L, et al. Influence of system parameters on dynamic behavior of gear pair with stochastic backlash [J]. Meccanica, 2014, 49(2): 429-440.

收稿日期: 2022-01-05