

基于 HJB 方程稳定流形方法的两轮自平衡车最优控制

岳玉环

(嘉兴职业技术学院, 浙江 嘉兴 314036)

摘要: 基于 HJB 方程的稳定流形结构, 借助深度学习的学习能力得到反馈式最优控制器, 实现对两轮自平衡车欠驱动系统的稳定平衡控制。通过数值仿真结果验证该最优控制器的控制效果, 尤其在系统参数不确定及存在外部扰动的情況下表现出了良好的鲁棒性。该方法避免了传统数值求解 HJB 方程方法中遇到的“维数诅咒”问题, 为非线性系统最优控制的实现提供了一种可行的方法。

关键词: HJB 方程; 稳定流形; 深度学习; 最优控制; 两轮自平衡车

中图分类号: TP273⁺ **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5276(2023)05-0176-05

Optimal Control for Two-wheeled Self-balanced Vehicles Based on Stable Manifold of HJB Equation

YUE Yuhuan

(Jiaxing Vocational and Technical College, Jiaxing 314036, China)

Abstract: Based on stable manifold of hamilton-jacobi-bellman equation and with help of the learning ability of deep neural network, an optimal controller in feedback form is obtained, realizing stable balance control of two-wheeled self-balanced vehicles without driving system. The numerical simulation results prove the favourable effectiveness of the optimal controller, and its good robustness under uncertain system parameters and external disturbances in particular. The method avoids the “Curse of Dimensionality” experiencing in traditional numerical solution of HJB equation, and provides a feasible approach for optimal control of nonlinear systems.

Keywords: HJB equation; stable manifold; deep learning; optimal control; two-wheeled self-balanced vehicles

0 引言

两轮自平衡车以其结构简单、运动灵活的特点广泛应用于现代交通中。典型的商业化产品有 Segway。该两轮机器人系统具有多变量、非线性、欠驱动的特点, 可以看作是一个运动的倒立摆平衡系统。

对于两轮自平衡车的平衡控制主要有线性控制器和非线性控制器两大类。线性控制器是形式简单且较为成熟的, 如 PID 控制器^[1-3] 和 LQR 控制器^[4-6], 但其不足之处是吸引区域较小, 只能满足一定范围内的平衡控制要求。在两轮自平衡车的平衡控制中, 一般都会存在着外部干扰、系统参数不确定等问题, 此时就需要考虑设计非线性控制器。在两轮自平衡车非线性控制器的众多研究中, 已经有 H_{∞} 非线性控制器^[7]、分层滑模控制方法^[8]、模糊控制算法^[9] 等等。

在考虑到两轮自平衡车电池容量因素的影响时, 设计出非线性最优控制器对两轮自平衡车的平衡控制有着非常重要的意义。本文受到文献 [10] 的启发, 基于 HJB (hamilton-jacobi-bellman) 方程的稳定流形结构, 利用深度学习设计了一种反馈式最优控制器。基本的思路是在两轮自平衡车非线性动力学方程的基础上, 推导出与最优控制条件相对应的 HJB 方程, 并结合哈密顿系统

的稳定流形结构, 生成随机样本集, 利用神经网络较强的学习能力, 近似得到稳定流形结构, 从而构建出反馈式最优控制器。

1 两轮自平衡车的数学模型

两轮自平衡车的结构简图如图 1 所示, 各变量定义及具体数值参见表 1^[7]。本文只研究两轮自平衡车沿直线运动的情况, 且在建模时忽略可能发生在摆杆上的外界干扰力矩。应用拉格朗日方程得到两轮自平衡车的动力学模型^[11] 为

$$\begin{cases} (ml^2 + I_p) + mlr\dot{\phi} \cos\theta - mgl\sin\theta = -\tau + k\dot{\phi} \\ [(M_r + m)r^2 + I_r] + mlr\dot{\theta} \cos\theta - mlr\dot{\theta}^2 \sin\theta = \tau - k\dot{\phi} \end{cases} \quad (1)$$

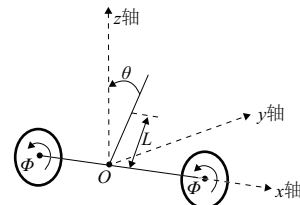


图 1 两轮自平衡车结构简图

基金项目: 嘉兴职业技术学院校级课题项目 (22407030100)

作者简介: 岳玉环 (1981—), 女, 河北唐山人, 讲师, 硕士, 研究方向为非线性系统的控制及 Python 的应用, jiaxing2012yue@163.com。

表 1 两轮自平衡车的变量表

符号/单位	名称	数值
m/kg	车体摆杆的质量	3.75
M_r/kg	两轮子的质量	2.75
l/m	车体质心到轮轴中心线距离	0.143 5
r/m	轮子的半径	0.25
$I_p/\text{kg} \cdot \text{m}^2$	摆杆的转动惯量	0.201
$I_r/\text{kg} \cdot \text{m}^2$	轮子的转动惯量	0.042 1
k	电动机的动摩擦因数	0.002 15
$g/(\text{m}/\text{s}^2)$	重力加速度	9.81
θ/rad	摆杆的倾斜角度	-
Φ/rad	轮子的转动角度	-

选择系统的状态变量为 $X=(x_1, x_2, x_3)=(\theta, \dot{\theta}, \dot{\phi})$, 电动机的转矩作为控制信号即 $\nu=\tau$ 。为了表述简洁, 作如下定义:

$$\begin{cases} \alpha=ml^2+I_p \\ \beta=mlr \\ \gamma=mg l \\ \eta=(M_r+m)r^2+I_r \end{cases} \quad (2)$$

将式(2)带入到式(1)中得到两轮自平衡车的状态空间方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1=x_2 \\ \dot{x}_2=\frac{1}{\Delta}[\gamma\eta\sin x_1-\beta^2x_2^2\sin x_1\cos x_1+(\eta+\beta\cos x_1)(kx_3-\nu)] \\ \dot{x}_3=\frac{1}{\Delta}[-\beta\gamma\sin x_1\cos x_1+\alpha\beta x_2^2\sin x_1-(\alpha+\beta\cos x_1)(kx_3-\nu)] \end{cases} \quad (3)$$

式中 $\Delta=\alpha\eta-\beta^2\cos^2x_1$ 。

利用文献[12]中的部分线性化方法, 对式(3)进行进一步的简化。令

$$\nu=\frac{\beta\gamma\sin x_1\cos x_1}{\alpha+\beta\cos x_1}-\frac{\alpha\beta x_2^2\sin x_1}{\alpha+\beta\cos x_1}+kx_3+\frac{\alpha\eta-\beta^2\cos^2x_1}{\alpha+\beta\cos x_1}u$$

由此, 两轮自平衡车的状态方程式(3)简化为

$$\begin{cases} \dot{x}_1=x_2 \\ \dot{x}_2=\frac{\gamma\sin x_1}{\alpha+\beta\cos x_1}+\frac{\beta x_2^2\sin x_1}{\alpha+\beta\cos x_1}-\frac{\eta+\beta\cos x_1}{\alpha+\beta\cos x_1}u \\ \dot{x}_3=u \end{cases} \quad (4)$$

2 基于 HJB 方程的稳定流形最优控制器设计

2.1 两轮自平衡车的最优控制问题与 HJB 方程

在无穷维时间区间最优控制理论中, 非线性系统的最优控制问题等价于求解与其对应的 HJB 方程。接下来将推导与两轮自平衡车在一定意义下的最优控制问题对应的 HJB 方程。为了书写简便, 将状态方程式(4)简写为

$$\dot{X}=f(X)+g(X)U \quad (5)$$

$$\text{式中: } f(X)=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_2 \\ (\beta x_2^2+\gamma)\sin x_1 \\ \alpha+\beta\cos x_1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$g(X)=\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \eta+\beta\cos x_1 \\ -\alpha+\beta\cos x_1 \\ 1 \end{pmatrix}; U=u_0$$

假设系统式(5)的瞬时成本函数为

$$L(X, U)=\frac{1}{2}X^T X+\frac{1}{2}U^T U$$

则对应的成本函数为

$$J(X, U)=\int_0^\infty L(X(t), U(t))dt$$

在此意义下的两轮自平衡车式(5)的最优控制问题对应的 HJB 方程为

$$H(X, p)=p^T f(X)-\frac{1}{2}p^T G(X)p+\frac{1}{2}X^T X=0 \quad (6)$$

$$\text{式中: } G(X)=g(X)g(X)^T=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_2^2 & g_2 \\ 0 & g_2 & 1 \end{pmatrix}; p=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial V(X)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V(X)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial V(X)}{\partial x_3} \end{pmatrix}=\nabla V(X); V(X) \text{ 是 HJB 方程的未知解函数。}$$

得到最优控制信号为

$$U(X)=-g(X)^T P(X)=-g(X)^T \nabla V(X) \quad (7)$$

只要能够求解得到 $P(X)$, 就能得到最优控制信号。接下来通过引入稳定流形结构来尝试得到 $P(X)$ 。

2.2 稳定流形的结构

文献[13]中, SAKAMOTO N 等给出了关于 HJB 方程(6)稳定解的定义如下:

“若 $p(0)=0$, 且 0 是向量场 $\dot{X}=f(X)-G(X)p(X)$ 其中 $(p(X)=\nabla V(X))$ 的一渐近稳定平衡点, 那么 $V(X)$ 是 HJB 方程(6)的稳定解。”

从上面的稳定解定义出发, 现在假设 V 是 HJB 方程(6)在 0 点附近的稳定解且对 X 的连续一阶导数存在, 即 $\nabla V(X)=\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \frac{\partial V}{\partial x_3}\right)^T$ 。此刻定义一拉格朗日子流形 ΔV 为

$$\Delta V=\{(X, p) \mid p=\nabla V(X)\} \quad (8)$$

接下来要验证该拉格朗日子流形 ΔV 与 HJB 方程式(6)对应的哈密顿系统在平衡点 0 处的稳定流形之间的关系。

与 HJB 方程式(6)对应的哈密顿特征系统为

$$\begin{cases} \dot{X}=f(X)-G(X)p=\begin{pmatrix} x_2 \\ f_2-g_2^2 p_2-g_2 p_3 \\ -g_2 p_2-p_3 \end{pmatrix} \\ \dot{p}=-\begin{pmatrix} (\alpha\cos x_1+\beta)(\beta x_2^2+\gamma) \\ (\alpha+\beta\cos x_1)^2 p_2 \\ p_1+\frac{2\beta x_2\sin x_1}{\alpha+\beta\cos x_1} p_2 \\ 0 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial G'}{\partial x_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{式中 } G' = p^T G(X) p = \left(p_3 - p_2 \frac{\eta + \beta \cos x_1}{\alpha + \beta \cos x_1} \right)^2;$$

$$\frac{\partial G'}{\partial x_1} = \frac{2\beta p_2 (\alpha - \eta) [p_2 (\beta \cos x_1 + \eta) - p_3 (\alpha + \beta \cos x_1)] \sin x_1}{(\alpha + \beta \cos x_1)^3}.$$

可以验证两轮自平衡车的哈密顿系统式(9)满足下面两个条件。

条件 1: $f(X)$ 在平衡点 0 处可进行线性化。即可以表

$$\text{示为 } f(X) = AX + O(|X|^2), \text{ 其中 } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{\gamma}{\alpha + \beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

条件 2: 哈密顿矩阵是双曲的和可补的。

具体地讲, 所得到系统式(9)在平衡点 0 处的 Riccati 方程为

$$PA + A^T P - PG(0)P + I_3 = 0 \quad (10)$$

其哈密顿矩阵为

$$H_{\text{am}} = \begin{pmatrix} A & -G(0) \\ -I_3 & -A^T \end{pmatrix}.$$

通过带入表 1 中的相关数值进行计算得到 H_{am} 的特征值为 $[\pm 3.871 \ 500 \ 49, \pm 3.423 \ 967 \ 93, \pm 1.364 \ 488 \ 04]$ 。

据文献[13]中对于哈密顿矩阵及生成的特征值空间的分析, 该哈密顿矩阵 H_{am} 是双曲的和可补的。

至此, 在满足条件 1 和条件 2 的基础上, 据文献[10]中的定理 2.1, 可以得到如下结论:

哈密顿系统式(9)在平衡点 0 处的稳定流形是一个光滑的拉格朗日子流形, 且在 0 点附近, 与式(8)一致。此外, 存在常数 $\delta > 0$, 对所有的 X 满足 $|X| < \delta$ 时, 存在 $\mu > 0$ 使得

$$|P(X) - P_0 X| \leq \mu |X|^2$$

式中 $P_0 = \frac{\partial^2 V}{\partial X^2}(0)$ 是 Riccati 方程式(10)在平衡点 0 处的稳定解。

至此已找到了哈密顿系统式(9)在 0 点附近的稳定流形即为拉格朗日子流形 ΔV 。

2.3 稳定流形的近似

假设 X_0 为在平衡点 0 附近的一个点, 此时要考虑下列系统的两点边值问题

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{pmatrix} x_2; \\ f_2 - g_2^2 p_2 - g_2 p_3; \\ -g_2 p_2 - p_3 \end{pmatrix}; \\ \dot{p} = - \begin{pmatrix} \frac{(\alpha \cos x_1 + \beta)(\beta x_2^2 + \gamma)}{(\alpha + \beta \cos x_1)^2} p_2 \\ \frac{2\beta x_2 \sin x_1}{p_1 + \alpha + \beta \cos x_1} p_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial G'}{\partial x_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \end{cases} \begin{cases} X(0) = X_0; \\ p(\infty) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

通过前面对 HJB 方程稳定流形结构的分析, 该系统两点边值问题的解一定包含在哈密顿系统式(9)的稳定流形内部。这就为通过深度学习算法来近似系统式(9)的稳定流形提供了必要的理论支撑, 并可以由此获

得神经网络模型的训练和测试样本集。

3 稳定流形的深度神经网络近似

3.1 神经网络的选择

使用 PyTorch 深度学习框架搭建长短期记忆神经网络(long short term memory), 简记该神经网络为 $P^{NN}(\theta, X)$, 其输入为 $X = (x_1, x_2, x_3)$, 输出为 $p = (p_1, p_2, p_3)$, 输入层为 3, 中间层为 50。该网络具体结构^[10]表示如下:

$$\begin{cases} S^1 = \sigma(W^1 x + b^1) \\ Z^i = \sigma(U^{r,i} x + W^{r,i} S^i + b^{z,i}), \quad i = 1, \dots, L \\ G^i = \sigma(U^{g,i} x + W^{g,i} S^i + b^{g,i}), \quad i = 1, \dots, L \\ R^i = \sigma(U^{r,i} x + W^{r,i} S^i + b^{r,i}), \quad i = 1, \dots, L \\ H^i = \sigma(U^{h,i} x + W^{h,i} (S^i \odot R^i) + b^{h,i}), \quad i = 1, \dots, L \\ S^{i+1} = (1 - G^i) \odot H^i + Z^i \odot S^i, \quad i = 1, \dots, L \\ f(x, \theta) = WS^{L+1} + b \end{cases} \quad (12)$$

式中 θ 为神经网络的参数, 可以表示为

$$\theta = W^1, b^1, (U^{r,i}, W^{r,i}, b^{z,i})_{i=1}^L, (U^{g,i}, W^{g,i}, b^{g,i})_{i=1}^L, (U^{r,i}, W^{r,i}, b^{r,i})_{i=1}^L, (U^{h,i}, W^{h,i}, b^{h,i})_{i=1}^L, W, b.$$

3.2 训练样本和测试样本的获得及网络训练

通过求解系统式(11)的两点边值问题获得包含于稳定流形内部的轨迹为基础得到训练样本集和测试样本集。具体步骤如下。

第 1 步, 通过在 0 点附近随机取样得到一系列初始点 X_0 。

第 2 步, 利用 `scipy.integrate.solve_bvp` 对系统式(11)进行两点边值问题的求解, 得到各初始点对应的多条轨迹解。

第 3 步, 在求解得到的轨迹上按照一定的分布规律实现点 (X, p) 的选取, 以此作为训练样本集 D_{train} 。同样的方法获得随机的测试样本集 D_{test} 。

第 4 步, 通过在训练样本集 D_{train} 的训练 (本文采用 8 000 代) 并在测试样本集 D_{test} 进行准确度验证。

第 5 步, 将神经网络的输出 $P^{NN}(\theta, X)$ 带入式(7)中即可获得最优控制信号 U^{NN} 。

要指出的是, 并非所有初始点的两点边值问题都能成功地求解, 这就需要调整随机初始点的采样半径以及在调用 `scipy.integrate.solve_bvp` 时给出合理的初始猜测, 以达到全部成功求解为止。

4 数值仿真

4.1 在理想情况下, 任意初始位置的稳定平衡控制

为了初步验证基于 HJB 方程稳定流形结构获得的最优控制器效果, 首先不考虑外界干扰及参数不确定等情况, 假设初始状态 $X_0 = (1.3, 0, 0)$ 时, 其稳定效果及对应的控制信号如图 2 所示。图 3 展示了在理想情况下, 初始状态 $X_0 = (1.0, 0.5, 0)$ 时的稳定过程及控制信号。可以看到最优控制器能够在较短时间(4s 以内)实现了系统的稳定平衡。

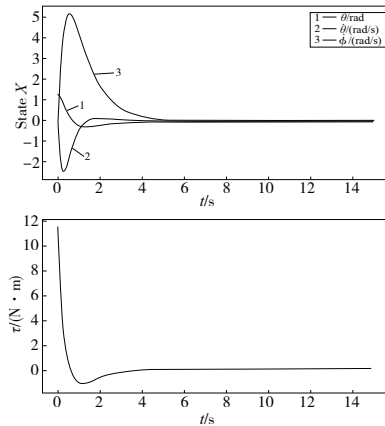


图2 初始状态 $X_0 = (1.3, 0, 0)$ 时的系统稳定过程及最优控制信号

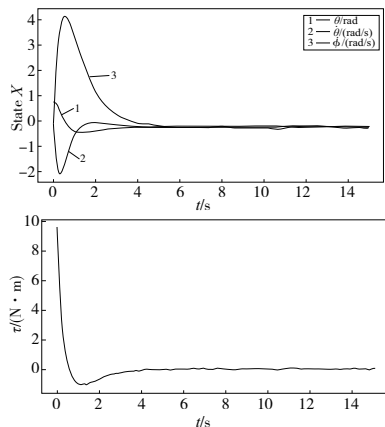


图3 初始状态 $X_0 = (1.0, 0.5, 0)$ 时的系统稳定过程及最优控制信号

4.2 在参数不确定情况下的稳定平衡控制

对实际系统的控制,往往存在系统参数发生变化的情况。假设在初始状态 $X_0 = (1.3, 0, 0)$ 下,系统参数存在这样的不确定性: $\alpha \rightarrow 1.5\alpha, \beta \rightarrow 1.3\beta, \gamma \rightarrow 1.2\gamma, \eta \rightarrow 1.4\eta$ 。

图4所示说明了该控制器能够应对在一定范围内系统参数波动的情况。与图2对比,其稳定时间稍有所延长,控制信号略大。

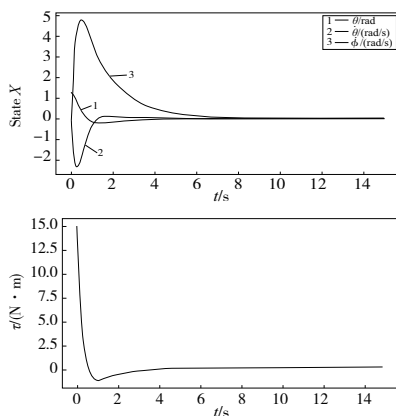


图4 初始状态 $X_0 = (1.3, 0, 0)$ 时存在参数不确定的系统稳定过程及最优控制信号

4.3 在外界干扰情况下的稳定平衡控制

在系统建模时忽略了外部的扰动,然而对于实际系统,来自外界的干扰是不可避免的。在数值实验中验证了初始状态 $X_0 = (1.3, 0, 0)$ 下,存在频率为 20 Hz、标准偏差为 10^{-5} 的高斯白噪声干扰情况下控制器仍然能够有效地实现稳定平衡控制,具有较好的鲁棒性,如图5所示。

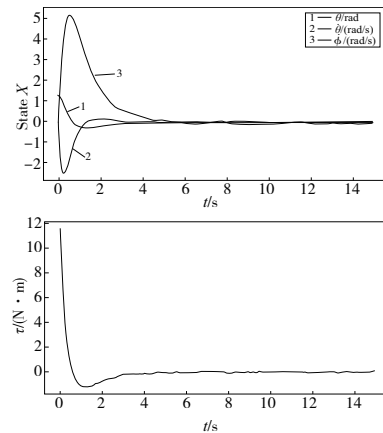


图5 初始状态 $X_0 = (1.3, 0, 0)$ 时受到外界低频扰动时系统稳定过程及最优控制信号

5 结语

在 HJB 方程的稳定流形框架下,利用深度学习神经网络的学习能力实现了对哈密顿系统稳定流形结构的近似,从而设计出最优控制器并在两轮自平衡车的稳定平衡控制上得到了验证。该最优控制器可以应对一定范围内的任意初始状态下的稳定平衡控制,在参数不确定及外界干扰存在的情况下仍然能够获得较好的控制效果,充分证明该控制器具有较好的鲁棒性。该方法避免了传统格点法求解 HJB 方程方法中遇到的“维数诅咒”,为其他非线性系统最优控制器的设计提供了很好的借鉴。

参考文献:

- [1] 傅忠云,陈秋阳,刘文波. 基于直接转矩控制的两轮自平衡车系统设计[J]. 压电与声光,2014,36(6):967-971.
- [2] 高正中,龚群英,宋森森. 基于 STM32 的智能平衡车控制系统设计[J]. 现代电子技术,2016,39(14):46-48.
- [3] 林枫,蔡延光. 双轮自平衡车的双闭环式 PID 控制系统设计与实现[J]. 工业控制计算机,2017,30(6):73-75.
- [4] 阮晓钢,任红格. 两轮自平衡机器人动力学建模及其平衡控制[J]. 计算机应用研究,2009,26(1):99-101.
- [5] 张金学,掌明. 两轮自平衡机器人的 LQR 实时平衡控制[J]. 自动化与仪表,2013,28(5):5-9.
- [6] 夏浩军,邱荣华. 倒立摆线性二次型最优控制方法研究[J]. 机械制造与自动化,2018,47(1):218-221.
- [7] RAFFOG V, MADERO V, ORTEGA M G. An application of the underactuated nonlinear H_∞ controller to two-wheeled self-balanced vehicles [C]//2010 IEEE 15th Conference on Emerging Technologies & Factory Automation. Bilbao, Spain: IEEE,2010:1-6.
- [8] 杨兴明,高银平,朱建,等. 基于分层滑模方法的两轮载人自平衡车的运动控制[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版),2013,36(12):1456-1460.
- [9] 姚尚明,童亮,杜迪. 自平衡两轮电动车控制系统仿真研

- 究[J]. 机械设计与制造, 2018(2):74-77.
- [10] CHEN G Y. Deep neural network approximations for the stable manifolds of the Hamilton-Jacobi equations[EB/OL]. (2020-07-30)[2022-03-10]. <https://arxiv.org/abs/2007.15350>.
- [11] MADERO V, ARACIL J, GORDILLO F. A nonlinear control law for two-wheeled self-balanced vehicles[C]//Melecon 2010 - 2010 15th IEEE Mediterranean Electrotechnical Conference. Valletta, Malta: IEEE, 2010:1557-1562.
- [12] SPONG M W. Partial feedback linearization of underactuated

mechanical systems [C]//Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS'94). Munich, Germany: IEEE, 2002:314-321.

- [13] SAKAMOTO N, VAN DER SCHAFT A J. Analytical approximation methods for the stabilizing solution of the Hamilton-jacobi equation[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(10):2335-2350.

收稿日期:2022-07-11

(上接第170页)

角和高度调节机构等,控制器选用ROBO TX接口板,装置搭建如图7所示。

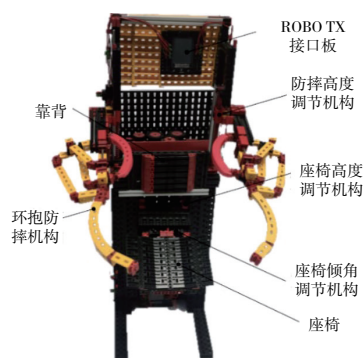


图7 老人洗浴防摔助力装置

图8给出了洗浴防摔助力装置的实验测试结果。图8(a)显示环抱防摔机构处于张开状态,老人洗浴前可以自由走进,并根据自身胖瘦进行自适应环抱调节,如图8(b)所示。图8(c)和图8(d)显示该防摔机构的高度调节,以满足不同身高需求老人。图8(e)和图8(f)显示了座椅倾斜和平放两种状态。前者可以满足老人站立洗浴,同时对臀部起到一定支撑助力,若老人体力不支可以控制座椅平放,让老人安全坐着洗浴。同时,该座椅也可以调节高度来满足不同身高需求。

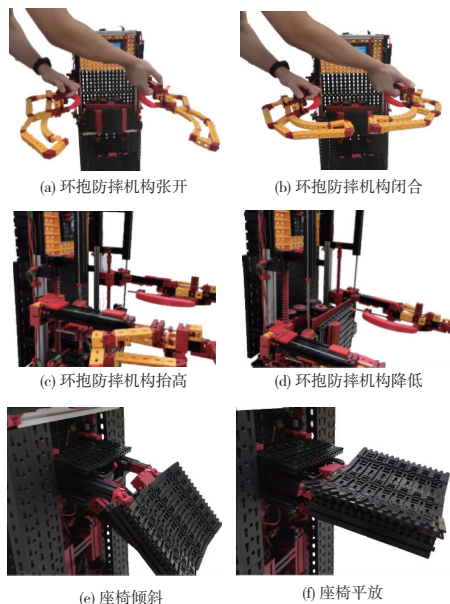


图8 装置实验测试结果

5 结语

老人常因体力不支等情况摔倒,而家中浴室则是主要摔倒场所,为此文中设计了一种老人洗浴防摔助力装置,通过理论分析和实验可得出以下结论:

1) 基于多连杆机构的欠驱动环抱防摔机构,能根据老人身体胖瘦实现自适应收缩和张开,满足了老人洗浴时对上身的有效助力,而防摔高度调节机构满足了不同身高老人的需求;

2) 基于齿轮蜗杆和连杆机构的座椅倾角和高度调节机构,满足了老人站立和坐着不同洗浴体验感需求,实现了不同洗浴姿态下的下肢有效助力;

3) 针对多变量环抱防摔机构设计,基于连杆传动关系及矢量封闭方程,在构建机构静力学和优化模型基础上,利用遗传算法实现了结构参数的全局寻优,有助于提高环抱防摔助力时的周向稳定性。

参考文献:

- [1] 李同林. 老人洗浴死亡浴室是否担责[J]. 中国老年, 2020(17):59.
- [2] 李媛,郑开元,文川,等. 助老产品家庭淋浴防摔倒装置的研发[J]. 科学技术创新, 2021(9):43-45.
- [3] 张林静. 面向老龄人群的洗浴产品设计研究[D]. 北京:北京理工大学, 2016.
- [4] 郝鹏翔,柳杰,赵静静. 洗浴移乘轮椅床创新设计[J]. 科技与创新, 2019(7):58-60.
- [5] 李浩,李永浩,吕文兴,等. 一种多功能老人洗浴凳:中国, CN211155463U[P]. 2020-08-04.
- [6] 杜露露,阮航,赵起飞. 老年人智能洗浴装置研究与设计[J]. 现代盐化工, 2021, 48(3):187-188.
- [7] 陈友莲,许焱炼,钟尚联. 一种无障碍老年浴缸:中国, CN112932298A[P]. 2021-06-11.
- [8] 黄自鑫,王乐君. 一类平面欠驱动机械系统控制方法综述[J]. 武汉工程大学学报, 2021, 43(4):448-454, 467.
- [9] 张颖,乔贵方,万其,等. 具有自适应能力的3指机械手爪的设计与实现[J]. 机械设计, 2020, 37(11):102-108.
- [10] 丛明,任杰,秦文龙,等. 一种绳索驱动的仿下颌机构设计与分析[J]. 机械设计与制造, 2021(11):251-256, 261.
- [11] 李鹏飞,伞红军,陈久朋,等. 基于封闭矢量法和D-H法的四足机器人逆运动学分析[J]. 科学技术与工程, 2019, 19(4):161-165.

收稿日期:2022-05-09