

# 一类两自由度非光滑塑性碰撞系统的擦边分岔研究

郝文鑫<sup>1</sup>, 张红兵<sup>1</sup>, 李万祥<sup>1</sup>, 李雄兵<sup>1</sup>, 魏心雨<sup>2</sup>

(1. 兰州交通大学, 甘肃 兰州 730070; 2. 西北师范大学, 甘肃 兰州 730070)

**摘要:**研究一类两自由度非光滑塑性碰撞系统动力学模型, 推导并利用模态叠加法求解系统, 建立 Poincaré 映射, 利用半解析法分析模型运动的整个过程。研究系统的周期和非周期运动; 利用分岔图、相图轨迹、Poincaré 截面图研究不同参数下以不同路径通往混沌状态下的擦边行为; 分析系统的 hopf 分岔、倍化分岔以及周期突变的“擦边”导致系统的中断以及不连续现象, 同时擦边运动导致系统 Poincaré 映射产生奇异性, 最后得出  $q=p/n$  周期运动的“擦边”行为通常导致系统的周期运动数不变, 碰撞次数增加或减少一次。

**关键词:**非光滑系统; 塑性碰撞; 擦边分岔; 混沌

**中图分类号:**TP391.9 **文献标志码:**B **文章编号:**1671-5276(2023)05-0171-05

## Study on Edge Bifurcation of Two-degree-of-freedom Plastic Impact System

HAO Wenxin<sup>1</sup>, ZHANG Hongbing<sup>1</sup>, LI Wanxiang<sup>1</sup>, LI Xiongbing<sup>1</sup>, WEI Xinyu<sup>2</sup>

(1. Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China;

2. Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

**Abstract:** The dynamic model of a two-degree-of-freedom non-smooth plastic collision system was studied, and its system was solved by means of the mode superposition method. The Poincaré mapping was established, and the whole process of the model motion was analyzed by the semi-analytical method. The periodic and aperiodic motions of the system were studied. Bifurcation diagram, phase diagram trajectory and Poincaré section diagram were applied to explore the edging behavior in different paths to chaotic state under different parameters. The hopf bifurcation, doubling bifurcation and the interruption of the system and discontinuous phenomenon caused by periodical tumble mutation of "cluster" were analyzed. And meanwhile fringe movement leads Poincaré mapping system to singularity. The final conclusion is drawn that  $q = p/n$  periodic motion "fired" behavior often results in the constancy of periodic motion number with one time increase or decrease in collision frequency.

**Keywords:** non-smooth system; plastic collision; bifurcations and fringes; chaos

## 0 引言

含间隙的塑性碰撞系统广泛地存在于机械系统之中<sup>[1-2]</sup>, 通过碰撞振动相互作用的系统已被广泛研究。作为碰撞振动系统的一种特殊分岔, 擦边分岔是碰撞运动与非碰撞运动之间的一种定性转换。深入研究具有间隙和运动约束的碰撞振动系统对了解其运动机理, 分析系统的全局性能、寿命等具有十分重要的意义。

HU H Y<sup>[3]</sup> 对分段线性系统提出了一种寻找其周期擦边轨道分岔测试函数的计算方法。罗冠炜等<sup>[4]</sup> 研究了常见的冲击振动, 进行理论与数值模拟, 介绍了碰撞振动系统的分岔与混沌性质, 研究其周期运动的稳定性等, 分析了系统相关的奇异性与混沌性形成的过程。张惠等<sup>[5]</sup> 研究了一类两自由度模型, 利用 Lyapunov 指数、擦边测试函数、Jacobian 矩阵变化情况研究其擦边现象。伍帅等<sup>[6-7]</sup> 利用不连续映射方法数值分析了不同周期下系统余维二擦边分岔点的分布情况。通过对比分别由全局庞加莱映射和原系统得到的余维二擦边点附近的分岔图, 验证了理论分析的有效性。王文杰<sup>[8]</sup> 提出一种矿用带式

输送机的非线性动力学建模方法, 仿真分析表明所构建模型的重锤位移变化优于传统模型, 非线性动力学模型性能更好。罗冠炜等<sup>[9]</sup> 对单自由度和双自由度塑性碰撞振动系统的动力学行为进行了研究, 发现了塑性碰撞系统的 Poincaré 映射具有擦边奇异性。

本文对一类两自由度塑性非光滑碰撞系统进行了研究, 通过编程求解, 研究了一类两自由度系统的复杂动力学行为及其“擦边”现象。

## 1 力学模型及运动微分方程

图 1 是一个含间隙的两自由度非光滑塑性碰撞振动系统动力学模型, 上下分别为质量为  $M_2$  凹槽和  $M_1$  的振子, 其中  $M_1$  由横向刚度均为  $K_x/2$  的线性弹簧与阻尼系数均为  $C_x/2$  的线性阻尼器相连接,  $M_1$  纵向由两个刚度均为  $K_y/2$  的线性弹簧与阻尼系数均为  $C_y/2$  的线性阻尼器相连接,  $F_f$  表示凹槽  $M_2$  中物体和  $M_2$  槽底所构成的摩擦副正压力,  $F_s$  表示凹槽  $M_2$  中物体和  $M_2$  槽侧面所构成摩擦副正压力的 2 倍;  $P_i = \sin(\Omega t + \tau) \lim_{x \rightarrow \infty}$  为作用在凹槽上的激振力 ( $\Omega$  为固有频率),  $\theta$  为激振力  $P$  和水平方向夹角,  $g$

第一作者简介: 郝文鑫(1997—), 男, 河北张家口人, 硕士研究生, 研究方向为非线性动力学, 18730357707@163.com。

表示重力加速度,  $\mu$  表示物体和凹槽之间的摩擦因数。当质量块  $M_1$  的纵向位移  $Y_1$  等于间隙  $d$  时, 质量块  $M_1$  和  $M_2$  发生碰撞。

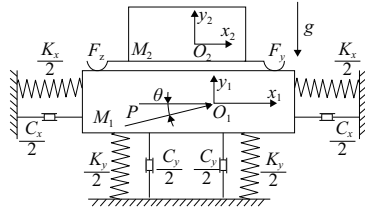


图1 系统模型图

满足条件  $y_1 < d$  的非碰撞冲击阶段的系统动力学微分方程如下:

$$\begin{cases} M_1 \ddot{X}_2 + C_x \dot{X}_1 + K_x X_1 = \alpha A \cos(\Omega t + \tau_0) + \mu \frac{M_2}{M_1 + M_2} (F_y + F_z) \\ M_1 \ddot{Y}_1 + C_y \dot{Y}_1 + K_y Y_1 = \beta A \sin(\Omega t + \tau_0) + M_1 g - \frac{M_2}{M_1 + M_2} F_y \\ M_2 \ddot{X}_2 = -\mu M_2 (F_y + F_z) \\ M_2 \ddot{Y}_2 = M_2 g + \frac{M_2}{M_1 + M_2} F_y \end{cases} \quad (1)$$

令:

$$\begin{cases} F_z = \chi M_2 g \\ F_{y1} = \beta A \sin(\Omega t + \tau_0) - C_y \dot{Y}_1 - K_y Y_1 \\ F_y = F_{y1} \left[ \frac{1 + \text{sign}(F_{y1})}{2} \right] [1 - \text{sign}(Y_2 - Y_1)] \\ A = \frac{g \sqrt{[K_y - (M_1 + M_2)\Omega^2]^2 + C_y^2 \Omega^2}}{\Omega^2} \end{cases}$$

取无量纲化:

$$\begin{cases} X = \frac{x}{\Omega^2}; Y = \frac{y}{\Omega^2} \\ \gamma = \frac{M_1}{M_2}; a = \frac{A}{M_1}; \Omega_i = \sqrt{\frac{K_i}{M_1}}; \xi_i = \frac{C_i}{2M_1 \Omega_i} \\ \tau = \Omega t; \Omega_i = \omega_i \Omega; i = X, Y \end{cases}$$

$x_1 < d$  时, 即  $M_1$  和  $M_2$  脱离, 式(1)的无量纲运动方程为:

$$\begin{cases} (1-m) \ddot{x}_1 + 2\xi_x \omega_x \dot{x}_1 + \omega_x x_1 = \alpha \cos(\tau + \tau_0) + \mu \gamma (f_y + f_z) \\ (1-\gamma) \ddot{y}_1 + 2\xi_y \omega_y \dot{y}_1 + \omega_y y_1 = \beta \cos(\tau + \tau_0) + (1-\gamma) g - \gamma f_y \\ \ddot{x}_2 = -\mu (f_y + f_z) \\ \ddot{y}_2 = g + f_y \\ f_z = \chi \gamma g \\ f_{y1} = \beta \sin(\tau + \tau_0) - 2\xi_y \omega_y \dot{y}_1 - \omega_y^2 y_1 \\ f_y = f_{y1} \left[ \frac{1 + \text{sign}(f_{y1})}{2} \right] [1 - \text{sign}(y_2 - y_1)] \\ a = g \sqrt{[\omega_y^2 - 1]^2 + 4\xi_y^2 \omega_y^2} \end{cases} \quad (2)$$

当  $x_1 = d$  时, 根据能量守恒定律可知,  $M_1$  和  $M_2$  纵向满足完全塑性碰撞过程式(3), 横向满足动量守恒定理式(4)。

$$\dot{y}_{1(n+1)} = \dot{y}_{2(n+1)} = (1-\gamma) \dot{y}_{1n} + \gamma \dot{y}_{2n} \quad (3)$$

$$(1-\gamma) \dot{x}_{1(n+1)} + \gamma \dot{x}_{2(n+1)} = (1-\gamma) \dot{x}_{1n} + \gamma \dot{x}_{2n} \quad (4)$$

式中:  $\gamma$  是  $M_1$  和  $M_2$  的质量比例;  $\Omega_i$  和  $\xi_i$  分别是系统的横向和纵向的固有频率和阻尼系数;  $A$  和  $a$  是可以抛起质量块的最小激振力;  $\alpha$  和  $\beta$  分别为无量纲比例系数;  $\alpha$  为横向抛掷系数;  $\beta$  为纵向抛掷系数。

考虑摩擦的 Stribeck 效应并利用双正切函数进行平滑处理, 修正后摩擦系数的数学模型如式(5)所示。

$$\mu = \tanh(\sigma) [\mu_s + (\mu_s - \mu_k) e^{-|\delta \dot{y}|}] \quad (5)$$

根据文献[8]经验可取摩擦模型参数:  $\sigma = 200$ ;  $\gamma = 2$ ;  $\delta = 4.6$ 。

## 2 擦边周期求解

在进行力学模型求解时, 首先对碰撞系统进行解耦。

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + \frac{2\xi_y \omega_y}{(1-\gamma)} \dot{y}_1 + \frac{\omega_y}{(1-\gamma)} y_1 = \\ \frac{1}{(1-\gamma)} [\beta \cos(\tau + \tau_0) + (1-\gamma) g - \gamma f_y] \\ \ddot{y}_2 = g + f_y \end{cases} \quad (6)$$

通过模态叠加法系统式(6)解耦得:

$$y_i = e^{-\eta_j t} (a_{yj} \cos \omega_{dj} t + b_{yj} \sin \omega_{dj} t) + A_j \sin(\omega t + \tau) + B_j \cos(\omega t + \tau) \quad (7)$$

$$\dot{y}_i = e^{-\eta_j t} [(b_{yj} \omega_{dj} - a_{yj} \eta_j) \cos \omega_{dj} t - (a_{yj} \omega_{dj} + b_{yj} \eta_j) \sin \omega_{dj} t] + A_j \omega \cos(\omega t + \tau) - B_j \omega \sin(\omega t + \tau) \quad (8)$$

式中:  $\omega_d$  为系统无碰撞的固有频率;  $i = 1, 2$ ;  $j = 1, 2$ ;  $\eta_j = \xi_j \omega_j^2$ ;  $\omega_{dj} = \sqrt{\omega_j^2 - \eta_j^2}$ ;  $a_{yj}$  和  $b_{yj}$  为由初始条件决定的积分常数。  $A_j$  和  $B_j$  满足:

$$\begin{cases} A_j = \frac{1}{2\omega_{dj}} \left( \frac{\omega + \omega_{dj}}{(\omega + \omega_{dj})^2 + \eta_j^2} - \frac{\omega - \omega_{dj}}{(\omega - \omega_{dj})^2 + \eta_j^2} \right) \overline{f_{yj}} \\ B_j = \frac{1}{2\omega_{dj}} \left( \frac{1}{(\omega + \omega_{dj})^2 + \eta_j^2} - \frac{1}{(\omega - \omega_{dj})^2 + \eta_j^2} \right) \overline{f_{yj}} \end{cases} \quad (9)$$

式中:  $\overline{f_{y1}} = \frac{1}{1-m} [\alpha \cos(\tau + \tau_0) + \mu \gamma (f_y + f_z)]$ ;  $\overline{f_{y2}} = g + f_y$ 。

特别地, 当  $M_1$  以 0 速度与  $M_2$  相碰, 即  $v_1 = 0$  时擦边分岔发生, 擦边周期运动满足以下初始条件:

$$\begin{cases} y_1 \left( \frac{2\pi}{\omega} \right) = y_1(0) = d, y_2 \left( \frac{2\pi}{\omega} \right) = y_2(0) \\ \dot{y}_1 \left( \frac{2\pi}{\omega} \right) = \dot{y}_1(0) = 0, \dot{y}_2 \left( \frac{2\pi}{\omega} \right) = \dot{y}_2(0) \end{cases} \quad (10)$$

由以上条件及式(7)和式(8)得到如下擦边周期运动:

$$\begin{cases} y_i^* = A_j \sin(\omega t + \tau^*) + B_j \cos(\omega t + \tau^*) \\ \dot{y}_i^* = A_j \omega \cos(\omega t + \tau^*) - B_j \omega \sin(\omega t + \tau^*) \end{cases} \quad (11)$$

式中  $\tau^* = \arctan\left(\frac{A_1 + A_2}{B_1 + B_2}\right)$ 。

令  $M = A_1 + A_2$ ,  $N = B_1 + B_2$ , 当系统发生擦边分岔时有:  $d^* = \sqrt{M^2 + N^2}$ 。

## 3 Poincaré 映射

碰撞系统由于发生“擦边”运动会导致 Poincaré 映射奇异性, 选择定相位面作为 Poincaré 截面不易观察碰撞系

统的擦边运动。

根据接触过程可以将 Poincaré 映射分为 3 个阶段。

$P_1$ :  $M_1$  和  $M_2$  接触后到脱离前的阶段;

$P_2$ :  $M_1$  和  $M_2$  脱离前到脱离后的阶段;

$P_3$ :  $M_1$  和  $M_2$  脱离后到下一次接触前的阶段。其 Poincaré 映射与之相同。

定义系统状态空间  $R^5 = \text{spane}(y_1, y_1', y_2, y_2', \tau)$ , 在  $R^5$  中定义系统不同状态间的转折界面  $\Sigma$ 。

$$\Sigma_1 = \{(y_1, y_1', y_2, y_2', \tau) \mid y_1 = y_2; y_1' = y_2';$$

$$f_{y_1} > 0 \cup f_{y_1} = 0, f_{y_1}' > 0\}$$

$$\Sigma_2 = \{(y_1, y_1', y_2, y_2', \tau) \mid y_1 = y_2; y_1' = y_2';$$

$$f_{y_1} = 0; f_{y_1}' < 0\}$$

$$\Sigma_3 = \{(y_1, y_1', y_2, y_2', \tau) \mid y_1 = y_2; y_1' > y_2'\}$$

$P_1$  的起始条件满足  $Y_n \in \Sigma_1$ , 终止条件满足  $Y_{n+1} \in \Sigma_2$ , 则在该阶段的 Poincaré 映射可表示为  $Y_{n+1} = P_1 \cdot Y_n$ ;

$P_2$  的起始条件满足  $Y_n \in \Sigma_2$ , 终止条件满足  $Y_{n+1} \in \Sigma_3$ , 与该过程相对应 Poincaré 子映射可表述为  $Y_{n+1} = P_2 \cdot Y_n$ ;

$P_3$  的起始条件满足  $Y_n \in \Sigma_3$ , 终止条件需要满足  $Y_{n+1} \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ , 该过程对应 Poincaré 子映射  $Y_{n+1} = P_3 \cdot Y_n$ 。

系统中可能存在的基本复合映射组有:

$$\{Y_n = P_1 \cdot Y_{n-1} \mid \exists n > 0, Y_n \in \emptyset; Y_{n-1} \notin \emptyset\}$$

$$\{Y_n = P_3 \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot Y_{n-1}\} \cup \{Y_n = P_3 \cdot P_2 \cdot Y_{n-1}\}$$

当纵向抛掷系数  $\beta < 1$  时, 凹槽无法脱离  $M_1$ , 系统始终处于  $P_1$  状态,  $Y_{n-1}$  不能穿越  $\Sigma_2$  截面过渡到  $P_2$  状态, 导致  $Y_n$  不存在; 当纵向抛掷系数  $\beta > 1$  时, 凹槽可以脱离  $M_2$ , 之后系统进入  $P_2$  状态, 在重力的作用下必定存在碰撞冲击  $P_3$  状态。系统一直处于  $P_1, P_2, P_3$  这 3 种状态的循环, 因此可以将碰撞前的状态作为  $\Sigma_3$  截面。

## 4 系统周期运动及分岔分析

### 4.1 hopf 分岔、状态转迁及“擦边”运动

设置系统参数组 1:  $\gamma = 0.8, \Omega = 80, \Omega_i = 45, \xi_i = 0.062, \mu = 0.3, \theta = \pi/6$ 。选择  $\beta$  作为分岔参数, 得到系统的分岔图如图 2 所示。由分岔图可得知, 当  $\beta \in (6.6, 6.81)$ , 碰撞系统具有稳定的  $q = 1/1$  周期运动; 当  $\beta$  递增穿越分岔值  $\beta = 6.99$  后,  $q = 1/1$  周期运动由吸引子发生 Hopf 分岔, 如图 3(b) 失稳并分岔出稳定的概周期运动, 在 Poincaré 截面上, 稳定的概周期运动由吸引不变环表示, 碰撞系统进入了概周期运动; 随着控制参数  $\beta$  的不断增大, 系统概周期运动逐渐失去光滑性, 并由此过渡到长周期运动, 当  $\beta = 7.5056$  时, 碰撞系统发生了“擦边”现象, 由图 3(c) 可知, 系统周期运动的“擦边”行为导致碰撞系统的周期运动的周期数不变, 而碰撞次数发生了变化; 随着参数  $\beta$  的进一步增加, 系统的长周期运动经锁相嵌入混沌, 如图 3(d) — 图 3(f) 所示。综上所述系统在参数组 1 下经历了从  $q = 1/1$  周期运动—概周期运动—擦边分岔多周期运动—锁相—混沌的过程。

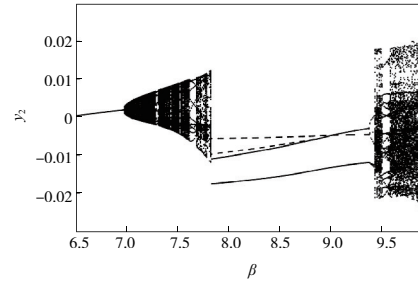


图 2 系统的 hopf 分岔图

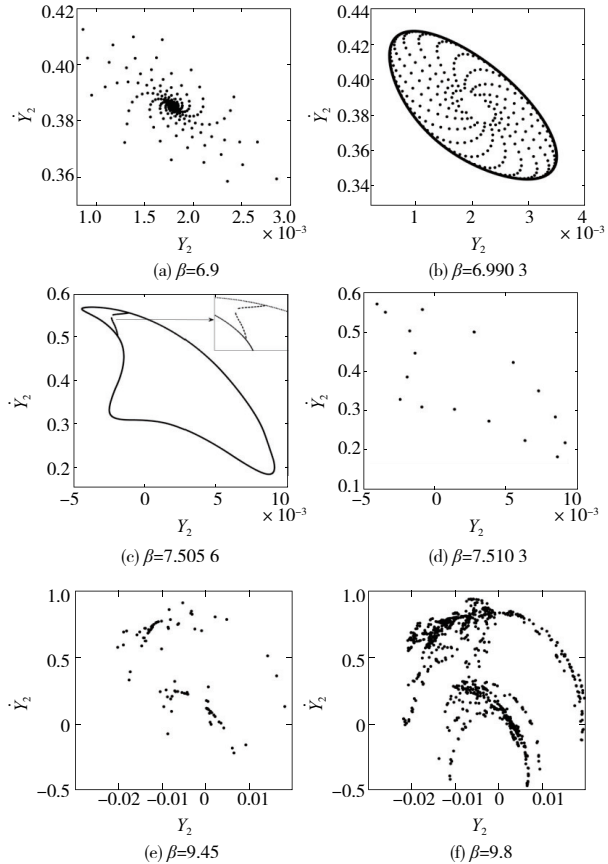


图 3 系统的 Poincaré 截面图

### 4.2 周期倍化分岔、状态转迁及“擦边”运动

设置系统参数组 2:  $\gamma = 0.698, \Omega = 62, \Omega_i = 45, \xi_i = 0.062, \mu = 0.3, \theta = \pi/6$ 。选择  $\beta$  作为分岔参数, 以  $\beta \in (6.6, 7.8)$  为参数区间得到系统的分岔图如图 4 所示。从系统分岔图可以看到, 在  $\beta = 7.427$  附近系统将发生“擦边”现象。进一步分析图 4 可知: 系统在  $\beta \in (6.6, 6.81)$  处于稳定的  $q = 1/1$  周期运动。在  $\beta = 6.813$  时发生倍化分岔, 随着  $\beta$  的增加, 系统在  $\beta \in (6.81, 7.22)$  处于稳定的  $q = 2/2$  周期运动, 如图 5(a) 所示; 在  $\beta = 7.22$  时再次发生倍化分岔, 系统进入了  $q = 4/4$  周期, 如图 5(b) 所示; 当  $\beta = 7.427$  时, 此时系统中  $M_1$  与  $M_2$  位移之差为间隙  $d$ , 此时  $M_1$  与  $M_2$  的速度相同, 即  $y_1 - y_2 = d, \dot{y}_1 = \dot{y}_2$ , 导致碰撞系统的 Poincaré 映射不连续, 随后系统经“擦边”运动从  $q = 4/4$  周期运动转迁为  $q = 4/5$  周期运动, 其变化过程见

图 5(a)—图 5(c)和图 6(a)—图 6(c);随着  $\beta$  的增加,系统经由多次倍化分岔进入了多周期运动,最终系统失去稳定进入了混沌状态。综上所述系统在参数组 2 下经历了从  $q = 1/1$  周期运动— $q = 2/2$  周期运动— $q = 4/4$  周期运动— $q = 4/5$  周期运动—混沌的过程。

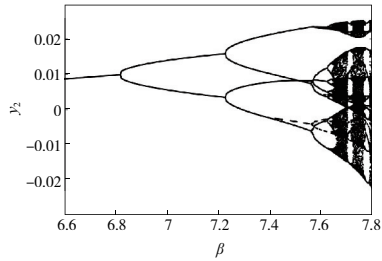


图 4 系统的倍化分岔图

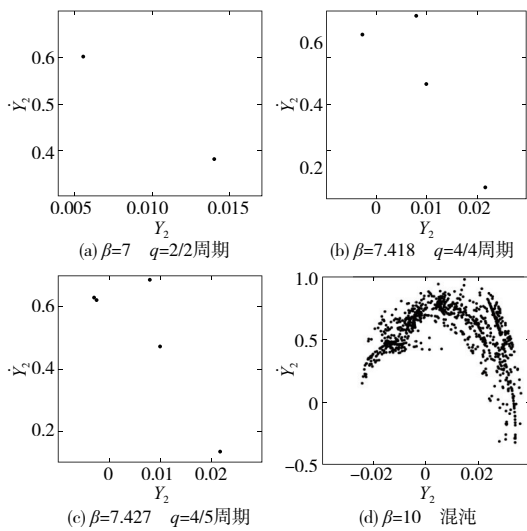


图 5 系统的 Poincaré 截面图

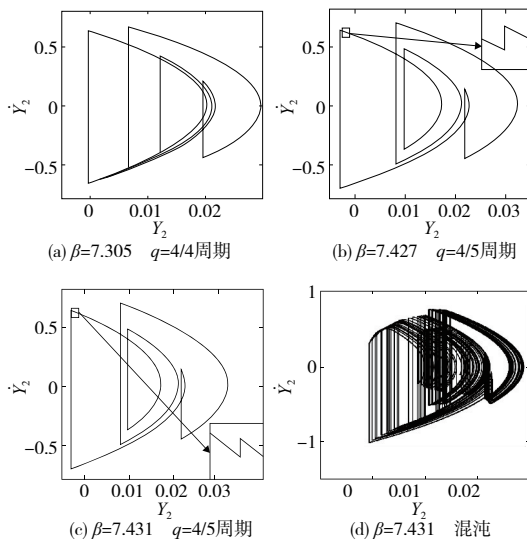


图 6 系统的相图轨迹

### 4.3 周期突变、状态转迁及“擦边”运动

设置系统参数组 3:  $\gamma = 0.4, \Omega = 60, \Omega_1 = 45, \xi_1 = 0.062,$

$\mu = 0.3, \theta = \pi/6$ 。选择  $\beta$  作为分岔参数,以  $\beta \in (4.9, 6.3)$  为参数区间得到系统的分岔图如图 7 所示。从系统分岔图可以看到,在  $\beta = 5.519$  附近系统将发生“擦边”现象。进一步分析图 7 可知;系统在  $\beta \in (4.9, 5.16)$  处于稳定的  $q = 1/1$  周期运动;在  $\beta = 5.17$  时发生倍化分岔,随着  $\beta$  的增加,系统在  $\beta \in (5.17, 5.518)$  处于稳定的  $q = 2/2$  周期运动,如图 8(a);随着  $\beta$  的激增,当  $\beta = 5.519$  时, $q = 2/2$  周期运动发生“擦边”分岔转迁为  $q = 2/3$  周期运动,从质量块  $M_2$  的相图 8(a)—图 8(c)可以清楚地观察到图 7 碰撞振动系统的“擦边”过程, $M_1$  与  $M_2$  速度均在  $v = 0.649$  时发生突变,此时  $y_1 - y_2 = d, \dot{y}_1 = \dot{y}_2$ ,导致碰撞系统的 Poincaré 映射不连续,由相图可以得知系统一直处于  $q = 2/2$  周期运动,而碰撞次数增加,如图 8(a)—图 8(c);随着  $\beta$  的增加,系统由  $q = 2/3$  周期运动突变进入混沌状态。综上所述系统在参数组 3 下经历了从  $q = 1/1$  周期运动— $q = 2/2$  周期运动— $q = 2/3$  周期运动—突变进入混沌的过程。

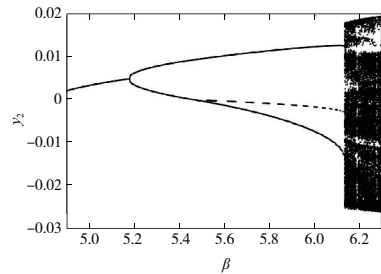


图 7 系统分岔图

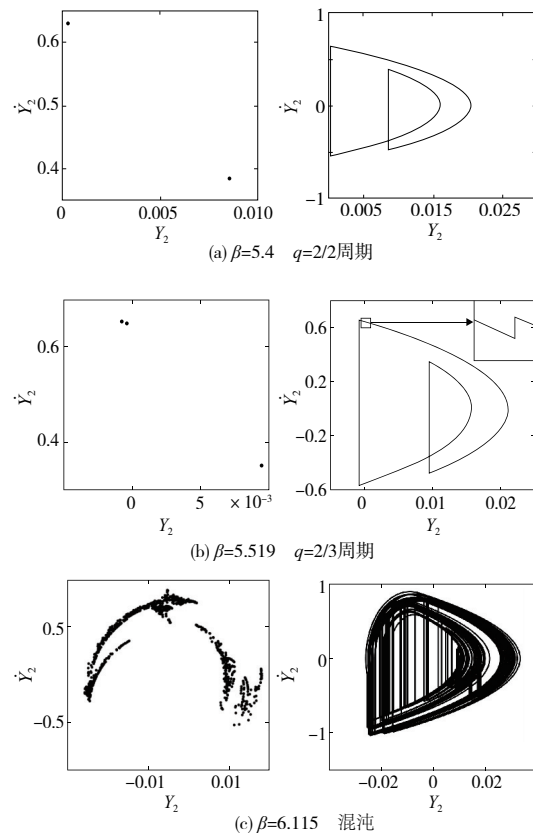


图 8 截面图和相图

## 5 结语

本文以新型两自由度非光滑塑性碰撞系统为分析对象,研究了塑性碰撞系统的“擦边”行为;建立了 Poincaré 映射,并研究了系统的周期运动及分岔;分析了系统在碰撞过程中发生的 3 种运动状态及对系统的影响。利用分岔图、相图轨迹、Poincaré 截面图发现了不同参数下系统发生 hopf 分岔的现象,并发现了此系统模型碰撞过程中的“擦边”现象。分析表明倍化序列和 hopf 分岔过程会因质量块与约束“擦边”而导致中断或不连续,“擦边”行为未能改变运动的最小周期,但在“擦边”前后质量块的 Poincaré 截面的次数都发生改变,通过 Matlab 数值仿真结果可以得出两自由度碰撞系统发生了“擦边”分岔行为,由系统 3 种不同参数下发生不同周期的运动进而验证了  $q=p/n$  周期运动的“擦边”行为通常导致系统的周期运动数不变,碰撞次数增加或减少一次。

### 参考文献:

- [1] DE SOUZA S L T, WIERCIGROCH M, CALDAS I L, et al. Suppressing grazing chaos in impacting system by structural nonlinearity[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2008, 38(3): 864-869.

- [2] PAVLOVSKAIA E, WIERCIGROCH M, GREBOGI C. Two-dimensional map for impact oscillator with drift[J]. Physical Review. E, Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics, 2004, 70(2/3): 036201.
- [3] HU H Y. Detection of grazing orbits and incident bifurcations of a forced continuous, piecewise-linear oscillator[J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, 187(3): 485-493.
- [4] 罗冠炜, 谢建华. 碰撞振动系统的周期运动和分岔[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [5] 张惠, 丁旺才, 李飞. 两自由度含间隙和预紧弹簧碰撞振动系统动力学分析[J]. 工程力学, 2011, 28(3): 209-217.
- [6] 伍帅, 徐洁琼, 王子汉, 等. 一类二自由度碰撞振动系统的余维二擦边分岔研究[J]. 振动与冲击, 2020, 39(20): 113-120.
- [7] 李松涛, 李群宏, 张文. 三自由度碰撞振动系统的余维二擦边分岔与混沌控制[J]. 广西师范大学学报(自然科学版), 2021, 39(4): 79-92.
- [8] 王文杰. 矿用带式输送机的非线性动力学建模研究[J]. 机械制造与自动化, 2020, 49(5): 131-134.
- [9] 罗冠炜, 谢建华, 孙训方. 单自由度塑性碰撞振动系统的周期运动及其分叉特点[J]. 中国机械工程, 2001, 12(11): 1297-1300.

收稿日期: 2022-04-12

(上接第 166 页)

表 8 不同流量下管路的固有频率

流量/ (L/min)	固有频率/Hz							
	1 阶	2 阶	3 阶	4 阶	5 阶	6 阶	7 阶	8 阶
0	281.84	551.83	618.58	695.92	728.95	799.16	827.13	971.37
25	281.85	551.84	618.59	695.93	728.97	799.17	827.14	971.38
50	281.87	551.87	618.61	695.94	728.99	799.19	827.17	971.40
75	281.91	551.92	618.66	695.97	729.04	799.23	827.22	971.46
100	281.97	551.98	618.71	696.01	729.11	799.29	827.29	971.53
125	282.03	552.05	618.77	696.05	729.18	799.35	827.36	971.60
150	282.07	552.11	618.84	696.09	729.25	799.41	827.41	971.67
175	282.21	552.23	618.94	696.18	729.38	799.51	827.59	971.81
200	282.28	552.30	619.01	696.23	729.46	799.57	827.67	971.89
215	282.39	552.41	619.11	696.30	729.58	799.67	827.80	972.01

## 4 结语

1) 管路内部流体压力作用于管壁上, 产生流体和结构的相互影响, 形成流固耦合现象, 在流体压力和本身作用下, 管路的各阶固有频率相对于无流体有一定提高, 在后续计算分析时要考虑流体作用, 不能忽略。

2) 管路流固耦合的固有频率随压力的提高而提高, 工作状态的高压力相对无压力或小压力, 其影响较大, 不能忽略其影响。

3) 管路流固耦合的固有频率随温度的提高而降低, 而且影响非常明显, 在后续计算分析时要考虑温度作用, 不能忽略其影响。

4) 管路流固耦合的固有频率随流量的提高而提高, 但是影响非常小, 基本可以忽略。

5) 液压系统管路的设计、维修阶段要考虑液压系统的脉动, 除满足最基本的设计标准外, 还要进行仿真计算, 使管路的固有频率尽量避开液压系统的脉动频率, 避免管路发生共振破坏。

### 参考文献:

- [1] 刘喆. T 型航空液压管路的流固耦合振动特性分析[J]. 机械设计, 2021, 38(9): 45-52.
- [2] 朴奎奎. 民用飞机液压系统压力级别选取论证研究[J]. 流体传动与控制, 2011(6): 22-24.
- [3] 权凌霄, 孙冰江, 赵劲松, 等. 航空弯曲液压管路流固耦合振动频响分析[J]. 西北工业大学学报, 2018, 36(3): 487-495.
- [4] 桑勇, 邵利来, 王旭东. 基于 ANSYS 大流量管路流固耦合振动分析[J]. 液压气动与密封, 2018, 38(7): 1-5.
- [5] 高峰. 飞机液压系统泵—管路振动特性研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2013.
- [6] 胡峰波, 王朝晖, 左登勇, 等. 某型机液压系统压力脉动测量与仿真[J]. 测控技术, 2022, 41(2): 75-81.
- [7] 黄河, 毛阳, 孙永宾, 等. YH-15 航空液压油的黏温特性测试与分析[J]. 兵工自动化, 2015, 34(5): 42-43.

收稿日期: 2022-03-31