

# 3-UPS/UR 并联机构运动学分析

郭忠峰,赵启航

(沈阳工业大学 机械工程学院,辽宁 沈阳 110870)

**摘要:**针对传统带有球副恰约束并联机构工作空间较小的问题,提出一种 3-UPS/UR 并联机构构型。通过螺旋理论对该机构自由度进行计算并分析。建立此并联机构的杆长约束方程,通过 Matlab 求解并联机构位姿反解;通过遗传算法,求解并联机构位姿正解。采用影响系数法,对驱动机构部分进行运动分析。通过搜索法对 3-UPS/UR 并联机构工作空间求解及对比分析。通过 Adams 仿真,得到平台位姿及速度参数,对比理论数值计算结果与仿真结果,验证并联机构约束方程正确性,并为机构的控制提供理论依据。

**关键词:**运动学;并联机构;螺旋理论;遗传算法;少自由度并联机构;恰约束

**中图分类号:**TH112 **文献标志码:**A **文章编号:**1671-5276(2023)05-0139-05

## Kinematic Analysis of 3-UPS/UR Parallel Mechanism

GUO Zhongfeng,ZHAO Qihang

(College of Mechanical Engineering, Shenyang University of Technology, Shenyang 110870, China)

**Abstract:**To improve the limited workspace of traditional parallel mechanism with ball pair exact constraint, a new 3-UPS/UR parallel mechanism is proposed. Its degrees of freedom is computed and studied by screw theory.The length constraint equations for the mechanism is built, the inverse solution of pose is gained from Matlab and the forward solution is obtained by genetic algorithm. The influence factor method is adopted to analyze the kinematics of the driving mechanism. The workspace of 3-UPS/UR parallel mechanism is solved by search method, and the parallel mechanism with ball pair exact constraint is solved. Through ADAMS simulation, the pose and velocity parameter of the platform are obtained. The theoretical numerical calculation results are compared with the simulation ones, and the correctness of the constraint equation of the parallel mechanism is verified, which provides a theoretical basis for the control of the mechanism.

**Keywords:**kinematics; parallel mechanism; screw theory; genetic algorithm; parallel mechanism with few degrees of freedom; just constraint

## 0 引言

由于并联机构具有刚度大、累积误差小、承载能力高、系统运行平稳等优点<sup>[1-4]</sup>,已被广泛应用于各个领域<sup>[5]</sup>。与传统 6-UPS 并联机构相比,3-UPS 并联机构刚度更大,承载能力更强;同时,其构型较为简单,运动副少,控制更简单。

针对传统带有球副恰约束并联机构工作空间较小的问题,本文提出了一种 3-UPS/UR 并联机构,以 UR(虎克铰链+转动副)的约束支链形式,替代传统球副。这种布置方式可有效增加动平台角度转动范围。然后计算该机构自由度,分析机构位姿,应用影响系数法对驱动机构进行运动分析。对 3-UPS/UR 和 3-UPS/S 并联机构工作空间进行求解及分析,最后对平台位姿及速度参数进行 Adams 仿真,对比理论数值计算结果及仿真结果,验证并联机构约束方程。

## 1 机构的自由度分析

3-UPS/UR 机构简图如图 1 所示。机构由 3 条驱动

支链、1 条约束支链及静、动平台组成。其中,每条驱动支链包括 1 个移动副(P)、1 个球副(S)及 1 个虎克铰链(U),约束支链包含 1 个虎克铰链和 1 个转动副(R)。3 条驱动支链上的 3 个球副采用圆周布置方式,固定在动平台上;虎克铰链同样呈圆周布置在静平台上。约束支链两端分别固定于两平台的几何中心。下面将采用螺旋理论<sup>[6]</sup>计算机构自由度。

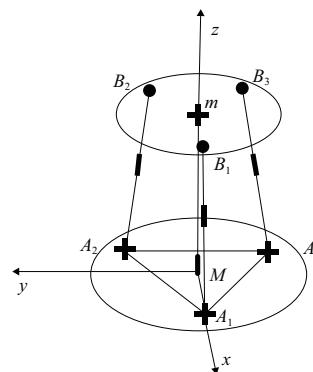


图 1 并联机构拓扑简图

基金项目:辽宁省教育厅项目(LJK20114)

第一作者简介:郭忠峰(1978—),男,辽宁沈阳人,副教授,博士,研究方向为机器人技术,978917375@qq.com。

并联机构支链包含约束和驱动支链,驱动支链采用 UPS 形式,UPS 支链具有 6 个自由度。对约束支链 UR 进行分析,以并联机构静平台的几何中心  $M$  作为原点建立坐标系  $M-xyz$ , $x$  轴过  $A_1$  点, $y$  轴平行于  $A_2A_3$  连线构成的边,指向  $A_2$ , $z$  轴垂直于静平台方向向上,转动副的螺旋<sup>[7]</sup>如下:

$$\$_1 = (0, 0, 1; 0, 0, 0) \quad (1)$$

虎克铰链的螺旋如下:

$$\begin{cases} \$_2 = (1, 0, 0; 0, 1, 0) \\ \$_3 = (0, 1, 0; 1, 0, 0) \end{cases} \quad (2)$$

根据上式可求得约束支链的反螺旋如下:

$$\begin{cases} \$_1^r = (0, 0, 1; 0, 0, 0) \\ \$_2^r = (1, 0, 0; 0, -1, 0) \\ \$_3^r = (0, 1, 0; -1, 0, 0) \end{cases} \quad (3)$$

由反螺旋式(3)可知,约束支链对机构动平台在平面的 3 个移动自由度具有约束,即机构具有绕空间 3 个坐标轴转动的自由度。由于整个并联机构未受到其他的约束,因此机构具有 3 个自由度。

## 2 机构的姿态速度

### 2.1 机构位置的约束方程

在图 1 中,设动平台几何中心  $m$ ,建立坐标系原点,同时建立  $m-xyz$  坐标系。静平台原点  $M$  到静平台铰点距离为  $R$ ,动平台原点  $m$  到动平台铰点距离为  $r$ 。 $M$  与  $m$  的连线即为  $z$  轴,两点之间距离为  $z$ 。机构的动平台与静平台上各 3 个铰点,布置方式采用圆周形布置,任意两铰点与所在平台原点连线所构成的夹角均为  $120^\circ$ 。 $m$  点在坐标系  $M-xyz$  中的坐标  $e$  为  $e = (0, 0, Z)^T$ 。令 3 个驱动支链上的直线驱动器长度分别为  $L_1, L_2, L_3$ 。由于受到约束支链的约束,本机构只能沿着  $x, y, z$  轴转动。下面推导机构的约束方程。 $A_i$  点在坐标系  $M-xyz$  中的坐标及  $B_i$  在坐标系  $m-xyz$  中的坐标如下:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_i = (A_{ix}, A_{iy}, A_{iz})^T \\ \mathbf{B}_i = (B_{ix}, B_{iy}, B_{iz})^T \end{cases} \quad (4)$$

则有如下公式:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1 = (R, 0, 0)^T \\ \mathbf{A}_2 = \left(-\frac{1}{2}R, \frac{\sqrt{3}}{2}R, 0\right)^T \\ \mathbf{A}_3 = \left(-\frac{1}{2}R, -\frac{\sqrt{3}}{2}R, 0\right)^T \\ \mathbf{B}_1 = (r, 0, 0)^T \\ \mathbf{B}_2 = \left(-\frac{1}{2}r, \frac{\sqrt{3}}{2}r, 0\right)^T \\ \mathbf{B}_3 = \left(-\frac{1}{2}r, -\frac{\sqrt{3}}{2}r, 0\right)^T \end{cases} \quad (5)$$

$B_i$  在坐标系  $M-xyz$  下的坐标为

$${}^M B_i = T \times B_i + e \quad (6)$$

$T$  为旋转变换矩阵,公式如下<sup>[8]</sup>:

$$T = R(z, \gamma) R(y, \beta) R(x, \alpha) =$$

$$\begin{bmatrix} C\beta C\gamma & S\alpha S\beta C\gamma - S\gamma C\alpha & C\alpha S\beta C\gamma + S\alpha S\gamma \\ C\beta S\gamma & S\alpha S\beta S\gamma + C\alpha C\gamma & C\alpha S\beta S\gamma - S\alpha C\gamma \\ -S\beta & S\alpha C\beta & C\alpha C\beta \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中: $\sin$  和  $\cos$  分别简写为  $S, C$ ;  $\alpha$  为绕坐标系  $x$  旋转的角度; $\beta$  为绕坐标系  $y$  旋转的角度; $\gamma$  为绕坐标系  $z$  旋转的角度。

杆长公式可以表达为式(8)。

$$L_i = \sqrt{(A_{ix} - {}^M B_{ix})^2 + (A_{iy} - {}^M B_{iy})^2 + (A_{iz} - {}^M B_{iz})^2} \quad (8)$$

通过对杆长公式的整理可以得到约束方程。

位姿求解的反解,即已知动平台的角度,求解各个驱动支链的变化,也就是已知  $(\alpha, \beta, \gamma)$  求  $(L_1, L_2, L_3)$ 。此处的  $\alpha, \beta, \gamma$  即坐标系中的  $x, y, z$ ,下文中的所有角度变化均以欧拉角  $\alpha, \beta, \gamma$  表示。位姿正解,即已知各个驱动机构的变化量,求解机构动平台的姿态,即已知  $(L_1, L_2, L_3)$ ,求  $(\alpha, \beta, \gamma)$ 。

$$\begin{cases} f_1 = (rC\gamma C\beta - R)^2 + (rC\beta S\gamma)^2 + (Z - rS\beta)^2 - L_1^2 = 0 \\ f_2 = \left[-\frac{1}{2}R + \frac{1}{2}rC\beta C\gamma - \frac{\sqrt{3}}{2}r(S\alpha S\beta C\gamma - C\alpha S\gamma)\right]^2 + \\ \left[\frac{\sqrt{3}}{2}R + \frac{1}{2}rC\beta S\gamma - \frac{\sqrt{3}}{2}r(S\alpha S\beta S\gamma + C\alpha C\gamma)\right]^2 + \\ \left[\frac{1}{2}rS\beta + \frac{\sqrt{3}}{2}rS\alpha C\beta + Z\right]^2 - L_2^2 = 0 \\ f_3 = \left[-\frac{1}{2}R + \frac{1}{2}rC\beta C\gamma + \frac{\sqrt{3}}{2}r(S\alpha S\beta C\gamma - C\alpha S\gamma)\right]^2 + \\ \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}R + \frac{1}{2}rC\beta S\gamma + \frac{\sqrt{3}}{2}r(S\alpha S\beta S\gamma + C\alpha C\gamma)\right]^2 + \\ \left[\frac{1}{2}rS\beta - \frac{\sqrt{3}}{2}rS\alpha C\beta + Z\right]^2 - L_3^2 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

### 2.2 遗传算法验证

遗传算法,于 1975 年由 John Holland 提出,是一种智能算法<sup>[9-10]</sup>。要想使遗传算法求得的值更加准确可靠,必须建立正确的目标函数和适应度函数。将机构位置约束方程进行一定改动,可以得到并联机构正解的适应度函数及目标函数,具体如下:

适应度函数为式(9)所求的约束方程,即  $f_i$ ; 目标函数为

$$F_{\min} = f_1 + f_2 + f_3 \quad (10)$$

对遗传算法适应度函数中的  $(\alpha, \beta, \gamma)$  进行求解,通过遗传算法运算可以得到如下的正反解对比结果,验证了遗传算法在本文中的正确性。在调用遗传算法过程中,由于并联机构为高度耦合系统,计算时可能会在某些特殊情况产生两组解,区别是在坐标系  $z$  方向的转动角度不同,一为正值,另一为负值;在实际情况中,由于并联平台会搭载陀螺仪等传感设备,可以根据设备反馈的正值或负值确定遗传算法的参数取值范围,确保正解的精度。具体参数如表 1 及表 2 所示。

表1 理论计算得到部分并联机构反解

序号	$\alpha/(^\circ)$	$\beta/(^\circ)$	$\gamma/(^\circ)$	$L_1/\text{mm}$	$L_2/\text{mm}$	$L_3/\text{mm}$
1	0	0	0	373.630 8	373.630 8	373.630 8
2	20	0	0	373.630 8	433.220 7	319.961 1
3	0	5	0	357.080 1	382.085 6	382.085 6
4	20	5	0	357.080 1	442.104 3	327.685 7
5	20	0	5	374.271 4	434.038 4	320.215 6

表2 遗传算法求得部分并联机构正解 单位: ( $^\circ$ )

序号	反解序号	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
1	1	$2.24 \times 10^{-5}$	$1.94 \times 10^{-5}$	$1.04 \times 10^{-4}$
2	1	$3.02 \times 10^{-5}$	$6.43 \times 10^{-5}$	$3.23 \times 10^{-4}$
3	2	19.98	0	0.797
4	2	19.98	0	0.003
5	3	0	5	-0.01
6	3	0	5	0.01
7	4	20	5	0
8	4	20	5	0
9	5	20	0	5
10	5	20	0	5

取表1和表2部分并联机构运行时的参数,可以得到Matlab所求得反解与遗传算法所求得正解的绝对误差在一定范围内,所以遗传算法求解机构正解所建立的适应度函数正确。

### 2.3 驱动机构运动分析

并联机构驱动支链的速度、加速度与杆长约束方程有关,本节采用影响系数法对驱动杆的伸缩速度、加速度进行分析。首先,由于杆长 $L$ 是关于 $\alpha, \beta, \gamma$ 的函数,因此可以写成下列公式:

$$\varphi = (\alpha, \beta, \gamma)^T \quad (11)$$

$$L_i = (\alpha, \beta, \gamma) \quad (12)$$

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

则驱动杆的速度可以表示为下列公式:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial L_1}{\partial \beta} & \frac{\partial L_1}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial L_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial L_2}{\partial \beta} & \frac{\partial L_2}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial L_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial L_3}{\partial \beta} & \frac{\partial L_3}{\partial \gamma} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\dot{L} = J \dot{\varphi} \quad (15)$$

式中: $J$ 为一阶影响系数矩阵,即杆长约束方程的雅可比矩阵; $\dot{\varphi}$ 为角度的一阶导数。驱动杆的加速度可以表示为

如下公式:

$$\ddot{L} = \dot{\varphi}^T H \dot{\varphi} + J \ddot{\varphi} \quad (16)$$

式中: $H$ 为二阶影响系数矩阵,通过对杆长 $L$ 求解的Hessian矩阵求得; $\dot{\varphi}$ 、 $\ddot{\varphi}$ 分别为角度的一阶导数和二阶导数。

根据上述内容,运用Matlab中的App Designer设计工具编写了一个可以进行交互且适用于本机构的应用程序如图2所示。

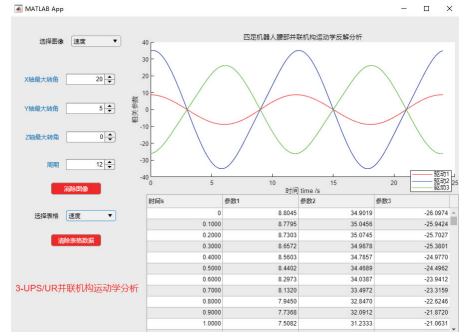


图2 并联机构运动学反解分析

### 2.4 结构参数约束条件下的工作空间确定

并联机构的工作空间主要受以下因素影响:杆长、运动副的转角、连杆限制条件<sup>[11]</sup>。

1) 杆长限制条件:本机构中,共有3个可以提供约束的驱动支链,用 $L_i$ 表示,其中 $i=(1, 2, 3)$ ,有 $L_{\min} \leq L_i \leq L_{\max}$ 。 $L_{\min}$ 为机构杆长的最小值, $L_{\max}$ 为机构杆长的最大值。由于机构为对称结构,因此3条驱动支链的杆长最大值与最小值相同。

2) 运动副转角限制:对于本机构,主要是3个位于动平台上的球面副以及位于静平台的3个虎克铰和1个转动副,通常每个运动副都有其最大转角,其最大转角由运动副的结构来确定。下式为机构的转角约束条件:

$$\begin{cases} \theta_1 = \arccos \frac{L_i \cdot n_1}{|L_i|} \\ \theta_2 = \arccos \frac{L_i \cdot n_2}{|L_i|} \\ \theta_3 = \arccos (n_1 \cdot n_2) \\ n_2 = R \times n_1 \end{cases} \quad (17)$$

式中: $\theta_1$ 为驱动支链与静平台连接的虎克铰转角; $\theta_2$ 为驱动支链与动平台连接的球面副转角; $\theta_3$ 为约束支链与动平台连接的虎克铰转角; $n_1$ 为静平台所处平面单位法向量; $n_2$ 为动平台所处平面单位法向量。

运用数值方法求解机构工作空间。3-UPS/UR 并联机构具有3个输出变量 $\alpha, \beta, \gamma$ 。令 $\Phi = [\alpha, \beta, \gamma]$ , $R$ 为机构工作空间。工作空间约束方程为

$$\begin{cases} L_{\min} \leq L_i \leq L_{\max} \\ \theta_1 \leq \theta_{\max} \\ \theta_2 \leq \theta_{\max} \\ \theta_3 \leq \theta_{\max} \end{cases} \quad (18)$$

表3为并联机构的工作空间求解所需参数,下面分别

以 UR 机构和 S 机构代表 3-UPS/UR 并联机构和 3-UPS/S 并联机构。

表 3 并联机构工作空间约束参数

名称	$L_{min}/mm$	$L_{max}/mm$	$\theta_1/(^\circ)$	$\theta_2/(^\circ)$	$\theta_3/(^\circ)$
UR 机构	310	460	60	25	60
S 机构	310	460	60	25	25

式(18)中的  $\theta_{max}$  为运动副最大转角。一般虎克铰和球副的运动范围  $<90^\circ$ , 但实际情况下, 球副的可运动角度约为  $25^\circ$ 。根据上述约束条件, 当机构的变量处于约束条件以外, 此时通过带入变量, 可得到机构在这一平面所能达到的最大值并记录, 然后再对下一个平面进行搜索, 直到满足机构在工作空间内的所有姿态情况。

当改变运动副转角时, 并联机构的最大工作空间将会改变, 但当运动副转角达到某一值时, 最大工作空间不会继续改变。表 4 为运动副转角与工作空间的变化关系 (表 4 中 3 个欧拉角的最大值采用其正值, 其范围为  $[-\alpha, \alpha]$ ,  $\beta$  与  $\gamma$  同  $\alpha$ )。3-UPS/UR 并联机构的工作空间角度变化情况如图 3 所示。

表 4 约束支链上最大转角对工作空间的影响

角度	单位: ( $^\circ$ )		
	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
20	21.120 6	22.448 3	19.904 6
25	26.360 1	25.947 7	26.452 9
30	32.241 1	26.915 7	31.265 8
40	32.241 1	26.915 7	42.568 6
50	32.241 1	26.915 7	54.398 6
60	32.241 1	26.915 7	66.421 8
70	32.241 1	26.915 7	66.421 8

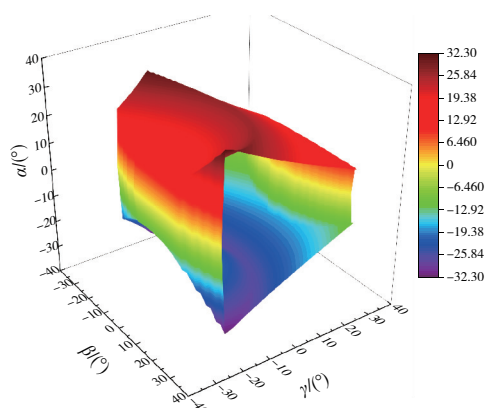


图 3 3-UPS/UR 并联机构工作空间角度变化范围

从图 3 中可以看出 3-UPS/UR 并联机构的工作空间角度变化范围, 在  $\alpha$  方向的最大角度约为  $30^\circ$ ,  $\beta$  与  $\gamma$  方向的最大角度约为  $26^\circ$ 。

3-UPS/UR 并联机构同 3-UPS/S 并联机构工作空间对比如图 4 所示。为了方便比较只绘制了并联机构角度

可达的最大值。

图 4 中蓝色部分为 3-UPS/UR 并联机构工作空间, 红色为 3-UPS/S 并联机构工作空间。由图可知, 3-UPS/UR 并联机构工作空间在边界位置较 3-UPS/S 相比可达区域更大, 而其他的位置同 3-UPS/S 机构基本相同 (因本刊为黑白印刷, 有疑问之处可向作者咨询)。

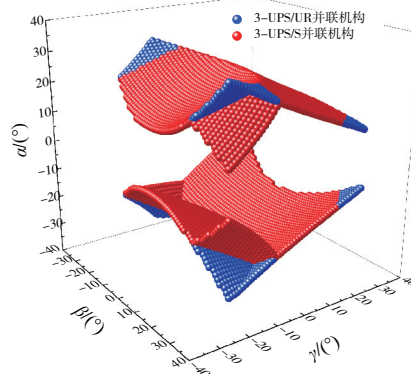


图 4 3-UPS/UR 及 3-UPS/S 并联机构工作空间对比

### 3 运动学数值结果及 Adams 正解仿真

为了更加直观地了解并联机构的运动学特性, 验证理论数值计算的正确性, 在 Solidworks 中完成对并联机构的建模, 导入 Adams 仿真, 给定由理论数值计算所得出的驱动函数, 并列出并联机构平台参数, 如表 5 所示。对并联机构进行仿真试验, 同时给出理论数值计算的各类参数曲线图, 实验结果如图 5—图 8 所示。

表 5 并联机构平台参数

名称	参数值
动平台半径/mm	200
静平台半径/mm	300
平台初始高度/mm	360
驱动支链长度/mm	373.630 8
设定平台 x 方向转动范围/ $^\circ$	$\pm 20$
设定平台 y 方向转动范围/ $^\circ$	$\pm 5$

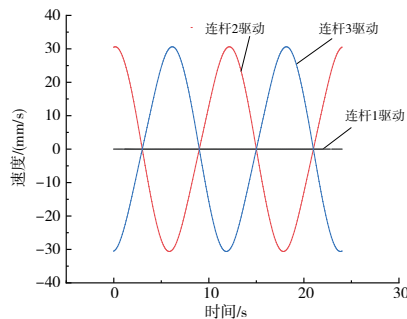


图 5 Matlab 速度变化曲线

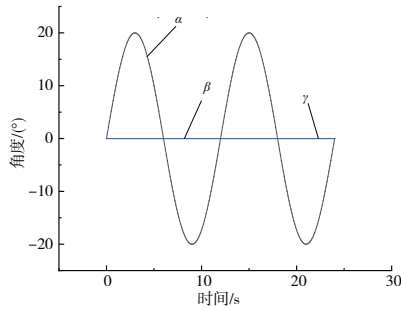


图6 Adams 动平台角度仿真变化曲线

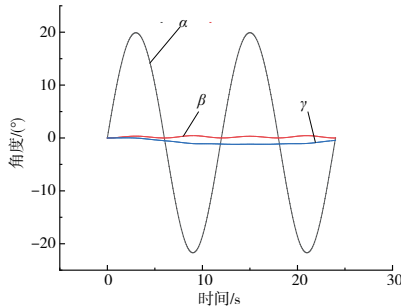


图7 Matlab 动平台角度理论变化曲线

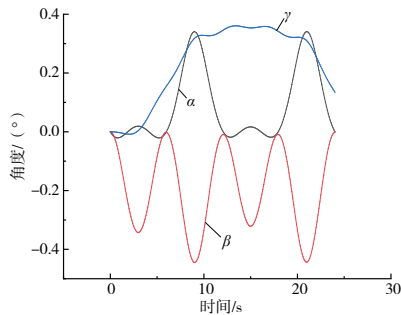


图8 理论与仿真动平台角度误差变化曲线

在仿真过程中,首先对3条驱动支链输入驱动函数,将式(19)带入式(15),并将其转化为随时间变化的样条曲线。将3条驱动支链的样条曲线分别命名为SPLINE\_1,SPLINE\_2,SPLINE\_3,并以速度形式输入Adams作为驱动函数。由于速度是杆长关于时间的一阶求导,故以机构速度变化代替杆长变化,输入形式如式(20)。公式中所涉及的 $(\alpha,\beta,\gamma)$ 为动平台转动角度关于时间的函数,带入后可以得到并联机构动平台角度变化参数和驱动支链速度、加速度变化参数,由于篇幅限制,仅对表1中的序号2算例求解如下:

$$\begin{cases} \alpha = 20/57.3 \times \sin(\pi/6 \times t) \\ \beta = \gamma = 0 \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} \text{CUBSPL}(\text{time}, 0, \text{SPLINE}_1, 0) \\ \text{CUBSPL}(\text{time}, 0, \text{SPLINE}_2, 0) \\ \text{CUBSPL}(\text{time}, 0, \text{SPLINE}_3, 0) \end{cases} \quad (20)$$

图5 为并联机构在 Matlab 理论计算所得的速度变化

曲线,将此曲线改写为样条曲线输入驱动函数,可以得到图6(图中 $\beta$ 和 $\gamma$ 变化角度均为 $0^\circ$ )的并联机构动平台转动角度仿真曲线,与 Matlab 理论计算所得的角度(图7)进行对比。

从图5中可以看到并联机构仿真的变化呈周期性,设定周期为12s,并联机构理论角度如图7所示,其最大角度为 $20^\circ$ ,并联机构的仿真结果如图6所示。仿真结果与理论差值如图8所示。由图8可知并联机构理论与仿真值差值很小,证明模型构建正确。由 Matlab 及 Adams 的仿真结果和理论数值计算分析可知,并联机构的约束方程建立正确。

## 4 结语

本文对3-UPS/UR 并联机构的自由度变化情况和运动学理论进行推导,对该并联机构的运动学进行求解,通过搜索法对3-UPS/UR 并联机构工作空间进行求解,并同3-UPS/S 并联机构工作空间进行对比,结果表明本文提出的3-UPS/UR 并联机构在接近边缘位置的工作空间大于3-UPS/S 并联机构。最后通过 Adams 仿真对运动学进行了分析,验证了理论推导的正确性。

### 参考文献:

- [1] 于红英,刘鹏,赵娣. 基于支链的并联机构位置分析及工作空间分析[J]. 吉林大学学报(工学版),2020,50(4):1275-1282.
- [2] 房海蓉,王立,张海强,等. 一种含闭环支链的新型并联机构设计与分析[J]. 北京航空航天大学学报,2019,45(3):454-463.
- [3] TIANH B, MA H W, XIA J, et al. Stiffness analysis of a metamorphic parallel mechanism with three configurations [J]. Mechanism and Machine Theory,2019,142:103595.
- [4] IBRAHIM O, KHALIL W. Inverse and direct dynamic models of hybrid robots [J]. Mechanism and Machine Theory, 2010, 45(4):627-640.
- [5] 孙付伟,赵俊伟,陈国强.3-PRS 并联机构运动学正解可视化分析[J]. 河南理工大学学报(自然科学版),2017,36(1):80-85.
- [6] 马晓丽,马履中,周兆忠. 并联机器人机构的虚拟样机运动仿真实验研究[J]. 计算机仿真,2006,23(6):213-216.
- [7] 宋利平,王强,周平,等. 并联式髋关节康复机构设计及分析[J]. 西华大学学报(自然科学版),2013,32(3):77-80.
- [8] 李刚. 基于6-PTRT的螺旋锥齿轮齿顶倒角机器人研究与开发[D]. 淄博:山东理工大学,2012.
- [9] 潘芳伟,段志善,贺利乐,等. 基于遗传算法的新型六自由度并联机器人运动学分析[J]. 机械科学与技术,2007,26(6):770-774.
- [10] 史峰,王辉,郁磊. MATLAB 智能算法30个案例分析[M]. 北京:北京航空航天大学出版社,2011.
- [11] 原政.3-RPS 和3-SPR 机构的工作空间差异分析[J]. 机械工程与自动化,2015(6):170-171.

收稿日期:2022-03-01