

# 考虑齿根过渡曲线的直齿轮多故障动力学特性研究

颜伟杰,张保强,冯吴俊,李潇乾  
(厦门大学 航空航天学院,福建 厦门 361005)

**摘要:**针对传统齿轮故障动力学模型中啮合刚度计算精度问题,提出一种综合考虑轮齿变形、齿轮基体变形、接触变形以及齿根过渡曲线的多故障动力学建模方法。建立齿轮副耦合振动分析模型,推导考虑齿根过渡曲线的齿轮时变啮合刚度计算方法,更加精确、高效地计算齿轮的时变啮合刚度,获取不同故障齿轮的动力学响应。以平行齿轮为研究对象,仿真研究裂纹、点蚀、缺齿故障时齿轮箱的加速度响应并进行多种故障模拟试验,结果表明:仿真在时域和频域上的响应都能反映与试验一致的损伤。

**关键词:**齿轮系统;时变啮合刚度;能量法;齿轮故障;频谱特性

**中图分类号:**TH132.41 **文献标志码:**B **文章编号:**1671-5276(2023)05-0078-04

## Reserch on Multi Fault Dynamic Response of Spur Gears Considering Tooth Root Transition Curve

YAN Weijie, ZHANG Baoqiang, FENG Wujun, LI Xiaoqian

(School of Aerospace Engineering, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

**Abstract:** With regard to the calculation accuracy of meshing stiffness in traditional gear fault dynamic model, a multi fault dynamic modeling method considering tooth deformation, gear matrix deformation, contact deformation and tooth root transition curve is proposed. The coupling vibration analysis model of gear pair is established, and the calculation method of gear time-varying meshing stiffness concerning tooth root transition curve is deduced, by which the time-varying meshing stiffness of gear can be calculated with more accuracy and efficiency, obtaining the dynamic response of gears with different faults. With parallel gear as the reserch subject, the gear box acceleration response of cracks, corrosive pittings and hypodontia are simulated and studied through various fault simulation tests. The results show that the test results of gear box in time domain and frequency domain are consistent with the simulation response of gear box in time domain and frequency domain.

**Keywords:** gear system; time varying meshing stiffness; energy method; gear failure; spectral characteristics

## 0 引言

平行齿轮系统在运行过程中,齿轮单双齿交替啮合,易导致裂纹、点蚀和缺齿等故障。开展平行齿轮的动力学研究对了解齿轮故障机理及故障诊断具有重大意义<sup>[1]</sup>。

齿轮运行中啮合刚度随时间的变化是齿轮系统振动的主要动态激励,众多学者在刚度计算和振动特征分析方面做了大量研究。1987年 YANG D C H 等<sup>[2]</sup>提出能量法来计算齿轮副的时变啮合刚度,2004年 TIAN X H<sup>[3]</sup>对该模型进行了改进,加入了剪切势能对啮合刚度的影响。SAINOT<sup>[4]</sup>提出了齿轮基体变形量的计算公式。CHAARI F 等<sup>[5-7]</sup>将齿轮基体变形量引起的刚度变化,加入到齿轮啮合刚度的计算过程中,并计算了齿轮剥落或断齿故障对齿轮啮合刚度的影响。以上的研究对齿根过渡曲线进行了简化,为了使时变啮合刚度的计算更加准确、符合实际,近年来,国内学者对啮合刚度的计算方法不断地改进。万志

国等<sup>[8]</sup>提出一种齿根圆和基圆不重合时的齿轮啮合刚度修正方法。CHEN Z G 等<sup>[9]</sup>提出了齿根裂纹故障啮合刚度的计算方法,并模拟了不同裂纹发展对啮合刚度的影响。LIANG X H 等<sup>[10]</sup>研究了齿轮表面不同剥落程度对齿轮啮合刚度的影响。

本文综合考虑了齿轮的轮齿变形、齿轮基体变形、接触变形等因素,采用了更加符合实际的齿根过渡曲线,较为精确及高效地计算齿轮的时变啮合刚度,采用集中参数法,建立平行齿轮副动力学方程,并对多种故障对时变啮合刚度的影响进行分析,仿真模拟不同齿轮故障引起的动力学响应,与试验结果对照,分析不同故障齿轮的振动特性。

## 1 齿轮副耦合振动分析模型

在考虑齿面摩擦的情况下,建立平行齿轮副的啮合耦合型动力学模型,如图1所示。

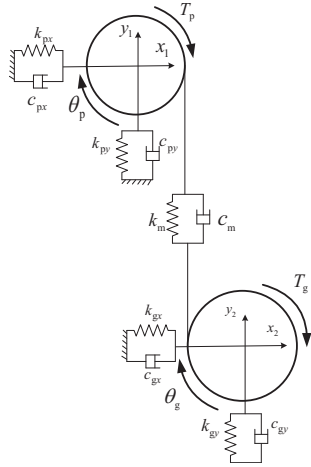


图1 齿轮系统耦合型振动分析模型

其对应的动力学方程组为

$$\begin{cases} m_p \ddot{x}_p + c_{px} \dot{x}_p + k_{px} x_p = F_f \\ m_g \ddot{x}_g + c_{gx} \dot{x}_g + k_{gx} x_g = F_f \\ m_p \ddot{y}_p + c_{py} \dot{y}_p + k_{py} y_p = F_p \\ m_g \ddot{y}_g + c_{gy} \dot{y}_g + k_{gy} y_g = F_g \\ I_p \ddot{\theta}_p = T_p + M_p - F_p R_p \\ I_g \ddot{\theta}_g = -T_g + M_g + F_g R_g \end{cases} \quad (1)$$

式中： $m_p$ 、 $m_g$  分别为主、被动齿轮的质量； $I_p$ 、 $I_g$  分别为主、被动齿轮的转动惯量； $R_p$ 、 $R_g$  分别为主、被动齿轮的基圆半径； $k_m$  为齿轮副的时变啮合刚度； $c_m$  为齿轮副的啮合阻尼； $k_{px}$ 、 $k_{gx}$  分别为主、动齿轮沿  $x$  方向的支撑刚度； $k_{py}$ 、 $k_{gy}$  分别为主、被动齿轮沿  $y$  方向的支撑刚度； $c_{px}$ 、 $c_{gx}$  分别为主、被动齿轮沿  $x$  方向的支撑阻尼； $c_{py}$ 、 $c_{gy}$  分别为主、被动齿轮沿  $y$  方向的支撑阻尼； $T_p$ 、 $T_g$  分别为作用在主、被动齿轮上的外载荷力矩； $F_f$  为齿轮啮合面的摩擦力； $M_p$ 、 $M_g$  分别为摩擦力产生的力矩； $x_p$ 、 $x_g$  分别为主、被动齿轮沿  $x$  方向上的位移； $y_p$ 、 $y_g$  分别为主、被动齿轮沿  $y$  方向上的位移； $\theta_p$ 、 $\theta_g$  分别为主、被动齿轮的扭转振动位移； $F_p$ 、 $F_g$  分别为作用在主、被动齿轮上的动态啮合力。

$$F_p = -F_g = c_m \dot{y} + k_m y \quad (2)$$

通过对方程(1)的求解,可以得到平行齿轮副耦合振动的动力学响应。

## 2 考虑齿根过渡曲线的齿轮时变啮合刚度

平行齿轮副运转过程中的内部激励主要来自于轮齿间的动态刚度激励,能量法是计算齿轮时变啮合刚度的一种较为精确的计算方法,在平行齿轮副上把每个轮齿假设为变截面的悬臂梁,轮齿的啮合刚度可表示为齿面法向作用力与轮齿在力作用点上变形量的比值。将轮齿上啮合力作用点处的变形量看成是由3大部分产生:1)轮齿部分的变形;2)与轮齿相连的过渡圆角处基体的变形;3)由接触应力引起的局部接触变形。

轮齿部分的变形 $\delta_1$ 可以看作由弯曲变形、剪切变形和

轴向压缩变形3部分组成。当轮齿在啮合力 $F$ 的作用下,对应的变形量可表示为:

$$\delta_b = \frac{F}{K_b} = F \cdot \int_0^l \frac{[(l-x) \cos \alpha_p - h \sin \alpha_p]^2}{EI_x} dx \quad (3)$$

$$\delta_s = \frac{F}{K_s} = F \cdot \int_0^l \frac{1.2 \cos^2 \alpha_p}{GA_x} dx \quad (4)$$

$$\delta_a = \frac{F}{K_a} = F \cdot \int_0^l \frac{\sin^2 \alpha_p}{EA_x} dx \quad (5)$$

式中: $G$ 是切变模量; $E$ 是弹性模量; $I_x$ 为距离齿根 $x$ 处的截惯性矩; $A_x$ 为横截面积<sup>[3]</sup>。

在渐开线齿轮中,如图2所示, $BC$ 为渐开线, $CD$ 为齿根过渡线,考虑实际加工过程中的齿根过渡, $CD$ 可表示为参数方程

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi - \left( \frac{a_1}{\sin \gamma} + r_p \right) \cdot \sin(\gamma - \varphi) \\ y = r \cdot \sin \varphi - \left( \frac{a_1}{\sin \gamma} + r_p \right) \cdot \cos(\gamma - \varphi) \end{cases} \quad (6)$$

式中: $r$ 为分度圆半径; $r_p$ 为刀顶圆角半径; $a_1$ 为刀顶圆角距中线距离<sup>[11]</sup>。

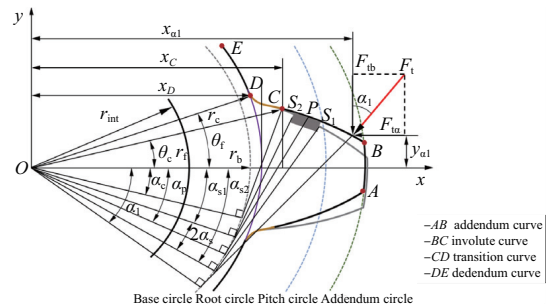


图2 渐开线齿轮几何模型

除了轮齿受力变形外,与轮齿相连的过渡圆角处基体的变形,也会引起轮齿的变形,影响齿轮的啮合刚度。对应的变形量 $\delta_i$ 为

$$\delta_i = \frac{F \cos^2 \alpha_p}{WE} \left[ L^* \left( \frac{u_f}{s_f} \right)^2 + M^* \left( \frac{u_f}{s_f} \right) + P^* (1 + Q^* \cdot \tan^2 \alpha_p) \right] \quad (7)$$

式中: $W$ 是齿宽; $L^*$ 、 $M^*$ 、 $P^*$ 、 $Q^*$ 等参数,在文献[4]中有具体描述。

根据赫兹定理可知,赫兹刚度与接触位置无关,对应的接触变形为

$$\delta_h = \frac{4F(1-\nu^2)}{\pi EW} \quad (8)$$

式中 $\nu$ 为泊松比。

将上述的3种变形叠加,即可得到轮齿上啮合力作用点处总的变形量为

$$\delta = \delta_1 + \delta_i + \delta_h = \delta_b + \delta_s + \delta_a + \delta_i + \delta_h \quad (9)$$

啮合齿轮对的等效啮合刚度 $K_i^j$ 表示第 $i$ 对齿轮啮合时,轮齿在啮合点 $j$ 处的刚度

$$K_i^j = \frac{F}{\delta} = \frac{F}{\delta_{i1} + \delta_{i1} + \delta_{i2} + \delta_{i2} + \delta_h} \quad (10)$$

式中下标1、2分别表示主动轮、从动轮。

当齿轮出现如图3所示的贯穿式齿根裂纹时,在计算

轮齿部分的变形时, 距离齿根  $x$  处的截面惯性矩  $I_x$ 、横截面积  $A_x$  将发生变化, 计算公式为<sup>[6]</sup>:

$$I_x = \begin{cases} \frac{1}{12}(h_x+h_x)^3 W & h_x \leq h_q \\ \frac{1}{12}(h_x+h_q)^3 W & h_x > h_q \end{cases} \quad (11)$$

$$A_x = \begin{cases} (h_x+h_x) W & h_x \leq h_q \\ (h_x+h_q) W & h_x > h_q \end{cases} \quad (12)$$

式中:  $h_q = h_c - q_0 \sin \alpha_c$ ;  $q_0$ 、 $\alpha_c$ 、 $h_c$  分别为裂纹长度和裂纹角度、裂纹起始点到轮齿中心线距离。

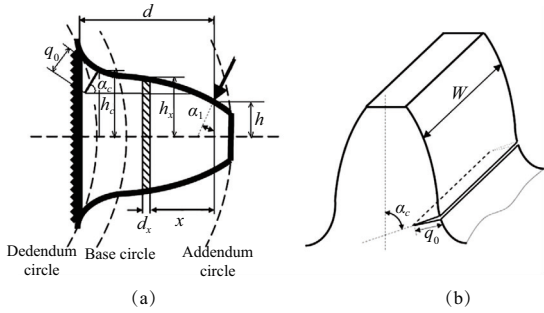


图3 齿轮齿根贯穿式裂纹

当齿轮出现如图4所示的表面点蚀故障时, 横截面积的变化量为  $\Delta A_x$ , 截面惯性矩变化量为  $\Delta I_x$ , 计算公式如下:

$$\Delta W_x = \begin{cases} W_s, & x \in \left[ \mu - \frac{a_s}{2}, \mu + \frac{a_s}{2} \right] \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (13)$$

$$\Delta A_x = \begin{cases} \Delta W_x h, & x \in \left[ \mu - \frac{a_s}{2}, \mu + \frac{a_s}{2} \right] \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (14)$$

$$\Delta I_x = \begin{cases} \frac{1}{12} \Delta W_x h^3 + \frac{A_x \Delta A_x \left( h_x - \frac{h}{2} \right)^2}{A_x - \Delta A_x}, & x \in \left[ \mu - \frac{a_s}{2}, \mu + \frac{a_s}{2} \right] \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (15)$$

式中:  $a_s$ 、 $W_s$ 、 $h_s$  分别为表面点蚀凹坑的长、宽、高;  $\mu$  表示点蚀区域中心线到齿根距离<sup>[7]</sup>。

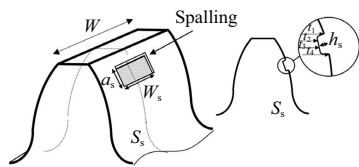


图4 齿轮表面点蚀

则变化后的截惯性矩为

$$I'_x = I_x - \Delta I_x \quad (16)$$

变化后的横截面积为

$$A'_x = A_x - \Delta A_x \quad (17)$$

变化后的实际啮合宽度为

$$W'_x = W - \Delta W_x \quad (18)$$

正常齿轮啮合及啮合刚度如图5所示。齿轮出现缺齿故障时, 缺齿部位的双齿啮合区将变为单齿, 单齿啮合

区将变成无齿。相应的啮合刚度也会发生变化, 只需在啮合刚度计算过程中减去单个轮齿对啮合刚度计算的影响量, 即可求出含缺齿故障的齿轮时变啮合刚度。

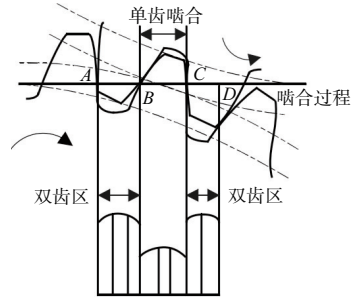


图5 正常齿轮啮合及啮合刚度

### 3 齿轮动力学仿真与试验响应分析

为了分析平行齿轮副的故障动力学响应, 以图6试验台的平行齿轮箱为对象, 其主要参数如表1所示。小齿轮为主动轮, 模拟主动轮转速为 1800 r/min 工况, 啮合频率为 690 Hz。仿真模型中的支撑刚度和支撑阻尼通过模型修正的方法识别, 分别为  $k_{px} = k_{gx} = 2.77 \times 10^5$  N/m,  $k_{py} = k_{gy} = 5.71 \times 10^6$  N/m,  $c_{px} = c_{gx} = 3.02 \times 10^3$  N · s/m,  $c_{py} = c_{gy} = 5.38 \times 10^3$  N · s/m。采集径向振动数据, 采样频率为 51 200 Hz, 对比不同状态时仿真与试验齿轮箱的动力学响应。

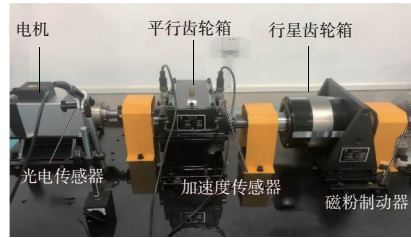


图6 试验台现场布置情况

表1 齿轮主要参数

参数	主动轮	被动轮
齿数	23	84
模数/mm	2	2
压力角/(°)	20	20
齿宽/mm	20	20
质量/kg	0.22	1.9
转动惯量/(kg · m <sup>2</sup> )	4.858 × 10 <sup>-5</sup>	3.509 × 10 <sup>-3</sup>
转速/(r/min)	1 800	493

#### 3.1 裂纹故障仿真与试验响应分析

如图7所示裂纹故障试验件, 在齿根过渡线中点位置裂纹角度  $\alpha_c = 45^\circ$ , 裂纹深度  $q = 1$  mm。仿真模拟的裂纹参数与试验件一致。



图7 裂纹故障齿轮试验件

裂纹齿轮仿真与试验动力学响应如图 8 和图 9 所示, 从时域信号中可以看出每个周期都存在冲击, 频谱图中与转速相关的频率成分幅值明显, 啮合频谱的二次谐波附近能量较集中, 同时存在着受转速调制的旁瓣信号。

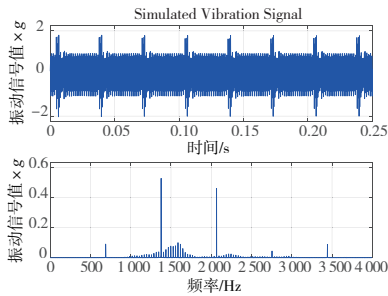


图 8 裂纹齿轮仿真动力学响应

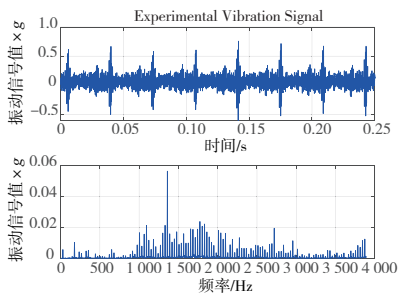


图 9 裂纹齿轮试验动力学响应

### 3.2 点蚀故障仿真与试验响应分析

图 10 所示为点蚀故障试验件, 在分度位置表面点蚀的长、宽、高分别为  $a_s = 1 \text{ mm}$ 、 $W_s = 10 \text{ mm}$ 、 $h_s = 0.5 \text{ mm}$  的点蚀齿轮。仿真模拟的点蚀参数与试验件一致。



图 10 点蚀故障齿轮试验件

在点蚀齿轮模拟试验中, 由于点蚀齿轮表面凹坑较小, 试验过程响应不明显。从图 11 和图 12 的时域信号中可以看出每个周期有轻微的振动幅值跳动, 说明齿轮啮合冲击较小且平缓, 在频谱图中轴速及啮合频率的旁瓣幅值较小且集中, 啮合频率及其高次谐波仍为主要频率成分。

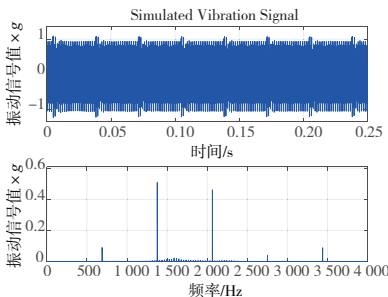


图 11 点蚀齿轮仿真动力学响应

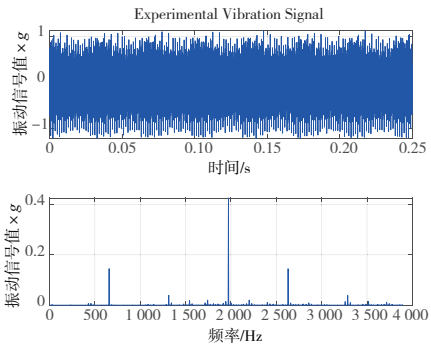


图 12 点蚀齿轮试验动力学响应

### 3.3 缺齿故障仿真与试验响应分析

图 13 所示为缺齿故障齿轮试验件。由于缺齿齿轮齿对齿轮啮合过程影响较大, 试验过程中能听到明显的冲击声。



图 13 缺齿故障齿轮试验件

如图 14 和图 15 所示, 在缺齿齿轮动力学响应中, 无论是仿真还是试验时域信号中可以看出每个周期都存在非常大的冲击, 受短脉冲的影响, 频谱图中啮合频率的旁瓣数量多、范围广, 且幅值较大, 啮合频率及其高次谐波容易淹没在这些旁瓣信号中。

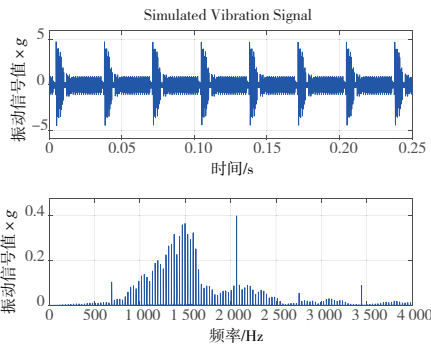


图 14 缺齿齿轮仿真动力学响应

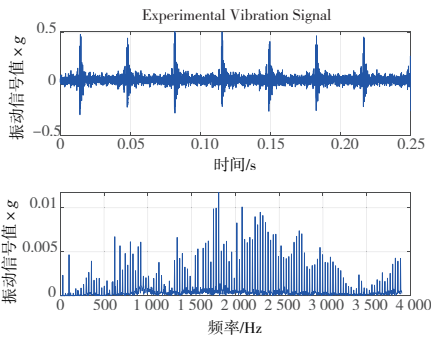


图 15 缺齿齿轮试验动力学响应



### 3 结语

1) 利用 EMD 结合峭度准则提取出故障频率成分丰富的分量,并通过自适应随机共振对系统参数进行优化,可以得到最优输出,实现故障特征提取。

2) 对于强背景下噪声信号,采用峭度值较高的 IMF 分量进行信号融合,可提升故障特征识别度。

3) 本文提出的方法所处理的故障特征信噪比得到了显著提升,有利于故障类型的准确判定,对风电机组中轴承微弱故障特征提取有重要意义。

#### 参考文献:

- [1] 苏连成,邢美玲,张慧. 基于组合预测模型的风电机组关键部位故障检测[J]. 太阳能学报,2021,42(10):220-225.
- [2] TONG R N, LI P, LANG X, et al. A novel adaptive weighted kernel extreme learning machine algorithm and its application in wind turbine blade icing fault detection[J]. Measurement, 2021, 185:110009.
- [3] LI Y T, JIANG W B, ZHANG G Y, et al. Wind turbine fault diagnosis based on transfer learning and convolutional autoencoder with small-scale data[J]. Renewable Energy, 2021, 171:103-115.
- [4] CHO S, CHOI M, GAO Z, et al. Fault detection and diagnosis of a blade pitch system in a floating wind turbine based on Kalman

filters and artificial neural networks [J]. Renewable Energy, 2021, 169:1-13.

- [5] 王谊,焦尚彬. 基于差分头脑风暴算法的微弱故障信号检测研究[J]. 自动化与仪器仪表,2021(9):66-70.
- [6] MA T C, XU F Y, HU J Z, et al. Double Gaussian potential stochastic resonance method and its application in centrifugal fan blade crack detection[J]. Chinese Journal of Physics, 2021, 74: 279-295.
- [7] HE Q B, WU E H, PAN Y Y. Multi-scale stochastic resonance spectrogram for fault diagnosis of rolling element bearings [J]. Journal of Sound and Vibration, 2018, 420:174-184.
- [8] 陈长征,谷晓娇. QPSO 匹配的 FIE 随机共振轴承故障诊断[J]. 振动·测试与诊断,2018,38(2):278-284,417.
- [9] 郑煜,王凯,付兴娥,等. 基于三稳态随机共振的滚动轴承早期故障诊断研究[J]. 机械制造与自动化,2020,49(3):192-194.
- [10] HARIKRISHNAN N B, NAGARAJ N. When noise meets chaos: stochastic resonance in neurochaos learning [J]. Neural Networks, 2021, 143:425-435.
- [11] 谷玉海,朱腾腾,饶文军,等. 基于 EMD 二值化图像和 CNN 的滚动轴承故障诊断[J]. 振动·测试与诊断,2021,41(1): 105-113,203.
- [12] 王奉涛,邓刚,王洪涛,等. 基于 EMD 和 SSAE 的滚动轴承故障诊断方法[J]. 振动工程学报,2019,32(2):368-376.

收稿日期:2022-03-21

(上接第 81 页)

### 4 结语

1) 考虑了齿根过渡曲线,能够更准确地计算齿轮啮合刚度,齿轮在裂纹、点蚀及缺齿等多种故障时的动力学响应所反映的故障特征与试验结果一致。

2) 所提出的方法能模拟同一故障齿轮在不同故障程度下的响应特性,能为后续平行齿轮系统故障数据库的建立提供参考。

3) 轻微点蚀故障在频域响应上故障特征不明显,与正常齿轮频率成分及分布情况类似,有待进一步进行研究。

#### 参考文献:

- [1] 赵丽娟,刘晓东,李苗. 齿轮故障诊断方法研究进展[J]. 机械强度,2016,38(5):951-956.
- [2] YANG D C H, LIN J Y. Hertzian damping, tooth friction and bending elasticity in gear impact dynamics [J]. Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, 1987, 109(2):189-196.
- [3] TIAN X H. Dynamic simulation for system response of gearbox including localized gear faults [D]. Canada: University of Alberta, 2004.
- [4] SAINOT AND P, VELEX P, DUVERGER O. Contribution of gear body to tooth deflections—a new bidimensional analytical

formula[J]. Journal of Mechanical Design,2004,126(4):748-752.

- [5] MOHAMMED O D, RANTATALO M. Dynamic response and time-frequency analysis for gear tooth crack detection[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2016, 66/67:612-624.
- [6] CHAARI F, FAKHFAKH T, HADDAR M. Analytical modelling of spur gear tooth crack and influence on gearmesh stiffness[J]. European Journal of Mechanics - A/Solids, 2009, 28(3):461-468.
- [7] CHAARI F, BACCAR W, ABBES M S, et al. Effect of spalling or tooth breakage on gearmesh stiffness and dynamic response of a one-stage spur gear transmission [J]. European Journal of Mechanics - A/Solids, 2008, 27(4):691-705.
- [8] 万志国,菅艳阳,曹宏瑞,等. 时变啮合刚度算法修正与齿根裂纹动力学建模[J]. 机械工程学报,2013,49(11):153-160.
- [9] CHEN Z G, SHAO Y M. Dynamic simulation of spur gear with tooth root crack propagating along tooth width and crack depth[J]. Engineering Failure Analysis, 2011, 18(8):2149-2164.
- [10] LIANG X H, ZHANG H S, LIU L B, et al. The influence of tooth pitting on the mesh stiffness of a pair of external spur gears[J]. Mechanism and Machine Theory, 2016, 106:1-15.
- [11] 徐克根. 渐开线齿轮齿根过渡曲线计算及在 UG 中精确建立齿轮三维模型[J]. 装备制造技术,2019(11):168-171.

收稿日期:2022-03-17