

# 6-DOF 并联机器人输入奇异性的解析研究

刘艳梨<sup>1a</sup>, 刘海瑞<sup>1a</sup>, 邹上元<sup>1b</sup>, 姚佳烽<sup>2</sup>, 吴洪涛<sup>2</sup>

(1. 江苏安全技术职业学院 a. 电气工程学院; b. 交通与安全学院, 江苏 徐州 221011;

2. 南京航空航天大学 机电学院, 江苏 南京 210016)

**摘要:**为解决 6-DOF 并联机器人输入关节的奇异边界约束问题,开展奇异性研究。根据平面平台型 6-DOF 并联机器人的结构特点,采用自然坐标方法分别表示其位置和姿态,得到运动学正解的 6 个方程,结合 3 个约束方程,经过变量代换后,推导得到输入关节的  $6 \times 6$  雅可比矩阵,并获得输入奇异轨迹的解析表达式,分析并联机器人 6 条支腿之间的相互约束奇异性,找到支腿的边界约束,解决输入关节的奇异边界约束问题。输入奇异性的研究为基于正向运动学无奇异工作空间的三维完全可视化描述奠定坚实基础,也对轨迹规划、控制系统的设计具有重要意义。

**关键词:** 并联机器人; 输入奇异性; 自然坐标法; 边界约束

**中图分类号:** TH112 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5276(2023)05-0036-06

## Analytical Research on Input Singularities of 6-DOF Parallel Robot

LIU Yanli<sup>1a</sup>, LIU Hairui<sup>1a</sup>, ZOU Shangyuan<sup>1b</sup>, YAO Jiafeng<sup>2</sup>, WU Hongtao<sup>2</sup>

(1. a. College of Electrical Engineering; b. College of Transportation and Safty, Jiangsu College of

Safety Technology, Xuzhou 221011, China; 2. College of Mechanical and Electrical Engineering,

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract:** Singularity research is carried out to solve the problem of singular boundary constraints of input joints of 6-DOF parallel robot. According to the structural characteristics of the 6-DOF parallel robot with planar platform, the position and orientation of the mobile platform are described respectively by the natural coordinates method to obtain the six equations of forward kinematics. By combining three constraint equations and substituting variables, the  $6 \times 6$  Jacobian matrix of the input joints is deduced and the analytical expression of the input singular trajectory is obtained. The mutual constraint singularities among the six legs of the parallel robot are analyzed, and the boundary constraints of six legs are gained. The problem of singular boundary constraints of input joints is solved. The research of the input singularity lays a solid foundation for the description of the three-dimensional complete visualization of six-dimensional singularity-free workspace based on forward kinematics and has great significance for both trajectory planning and control design of the parallel robot.

**Keywords:** parallel robot; input singularity; natural coordinate method; boundary constraint

## 0 引言

6-DOF 并联机器人正常自由度瞬间发生改变时具有奇异性,产生奇异性时对应的位形即为奇异位形。为了使 6-DOF 并联机器人更好地应用在医疗、航空航天模拟器、海浪补偿模拟器等方面,设计和控制中避免奇异位形及其附近区域是其精度高、刚度大、承载能力强等动态性能的重要保障,同时,在设计、求解最大无奇异工作空间<sup>[1-2]</sup>、进行轨迹规划、控制等阶段均需要考虑并避免奇异位形。鉴于此,国内外很多学者展开了对奇异位形的研究。

在 1983 年由 HUNT K H<sup>[3]</sup>首次发现奇异位形。20 世纪 70 年代, HUNT K H<sup>[4]</sup>最早采用螺旋理论分析并联机构的奇异性。李艳文等<sup>[5]</sup>采用螺旋理论提出了奇异的运动学理论。CAO Y 等<sup>[6]</sup>也是较多地采用螺旋理论研究奇异性。BONEV I A 等<sup>[7]</sup>运用反螺旋理论对平面 3-DOF 并联

机器人进行奇异性研究。

MERLET J P 等<sup>[8]</sup>引入 Grassmann 线几何方法研究 MSSM 和 TSSM 平台的奇异性并建立奇异位形的几何条件。BEN-HORIN P 等<sup>[9-10]</sup>采用 Grassmann-Cayley 代数法研究一般 Stewart 机构的奇异性,得到具有奇异几何意义的表达式。虽然 Grassmann 线几何法能方便、直观地验证奇异性,但为了得到奇异性整体连续变化的分布规律,学者 FICHTER E F<sup>[11]</sup>、CHOI H B 等<sup>[12]</sup>使用经典的雅可比矩阵方法分别对 3—6 型 Stewart 并联机器人和 4-DOF 并联机器人的奇异位形进行研究。GOSSELIN C 等<sup>[13]</sup>采用雅可比矩阵方法对并联机构奇异性研究,将奇异位形分为边界奇异、位形奇异和结构奇异,其中,位形奇异是研究的主要问题。奇异位形包括输入奇异和输出奇异。

在此基础上,文献[6]基于半角变换方法推导得到一

**基金项目:**国家自然科学基金资助项目(51975277);江苏高校“青蓝工程”资助项目;江苏安全技术职业学院科技创新团队建设项目

**第一作者简介:**刘艳梨(1982—),女,江苏沐阳人,讲师,博士,研究方向为并联机器人、复杂机械多体系统动力学及其控制, mee\_liuyanli@126.com。

类并联机器人在给定位置时姿态奇异轨迹的 13 次解析多项式。文献[14]通过选择合适的点和方位矢量形成自然坐标描述 Cassino 并联机器人动态性能,并得到一个合适的模型。文献[15]采用自然坐标方法研究正向运动学的数值解法。

为了得到输入奇异性的解析表达式,并找出 6-DOF 并联机器人支腿的边界约束,提出了一种解决这类问题的新方法,采用自然坐标表示位置和姿态,推导得到 6 个运动学方程,结合 3 个约束方程,得到 9 个关于自然坐标变量的等价方程,经过进一步的变量代换和变量分离,得出关于 6 个自然坐标变量的 6 个二次多项式方程,此时输入和输出变量完全独立,进而获得输入关节新的雅可比矩阵。求解雅可比矩阵行列式,得到输入关节奇异轨迹的解析表达式,分析得到输入奇异的种类,最后得到输入关节支腿长的边界约束条件。

## 1 自然坐标与旋转矩阵

### 1.1 自然坐标

平面平台型 6-DOF 并联机器人及其坐标系如图 1 所示。该机构包括动、静上下两个平台和 6 条结构一致支腿组成,该机构属于平面平台型,为了方便分析,选择绝对静坐标系  $O_bxyz$  与静平台固定,相对动坐标系  $O_a\alpha\beta\gamma$  与动平台固定,其中, $O_a$ 、 $O_b$  分别是动、静平台的外接圆圆心; $z$ 、 $\gamma$  轴分别垂直于各自所在平面。

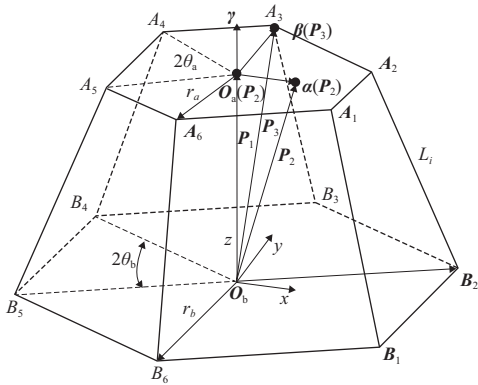


图 1 平面平台型 6-DOF 并联机器人简图

选择 3 点  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ , 分别位于动坐标系原点  $O_a$ 、 $\alpha$  轴端点和  $\beta$  轴端点处,如图 1 所示。用自然坐标表示 3 个点坐标,即:用  $P_1 = \{x_1, y_1, z_1\}^T$ 、 $P_2 = \{x_2, y_2, z_2\}^T$ 、 $P_3 = \{x_3, y_3, z_3\}^T$  分别表示点  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$  在静坐标系  $O_bxyz$  中的位置坐标,于是正向运动学模型中含有 9 个待求变量。

### 1.2 旋转矩阵

$P_2$ 、 $P_3$  和  $P_1$  存在如下关系: $P_2 = P_1 + R \cdot x$ ,  $P_3 = P_1 + R \cdot y$ 。动平台动坐标系  $O_a\alpha\beta\gamma$  的  $\alpha$  轴、 $\beta$  轴、 $\gamma$  轴对应的矢量记为: $\alpha = \{\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z\}^T$ ,  $\beta = \{\beta_x, \beta_y, \beta_z\}^T$ ,  $\gamma = \{\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z\}^T$ 。那么, $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  用点  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$  的自然坐标表示后可得:

$$\alpha = P_2 - P_1 = \{x_2, y_2, z_2\}^T - \{x_1, y_1, z_1\}^T = \{(x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1)\}^T \quad (1)$$

同理可得:

$$\beta = \{(x_3 - x_1), (y_3 - y_1), (z_3 - z_1)\}^T \quad (2)$$

由于  $\gamma$  垂直于  $\alpha$  和  $\beta$  所决定的平面,所以存在:

$$\gamma = \alpha \times \beta = \{(\alpha_y \beta_z - \alpha_z \beta_y), (\alpha_z \beta_x - \alpha_x \beta_z), (\alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x)\}^T = \{(y_1 z_2 - y_1 z_3 - y_2 z_1 + y_2 z_3 + y_3 z_1 - y_3 z_2), (-x_1 z_2 + x_1 z_3 + x_2 z_1 - x_2 z_3 - x_3 z_1 + x_3 z_2), (x_1 y_2 - x_1 y_3 - x_2 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_3 y_2)\}^T \quad (3)$$

静坐标系单位基矢量为: $x = \{1, 0, 0\}^T$ ;  $y = \{0, 1, 0\}^T$ ;  $z = \{0, 0, 1\}^T$ 。在静坐标系  $O_bxyz$  中,采用自然坐标将动平台的位置矢量  $P$  表示为  $P = P_1 = \{x_1, y_1, z_1\}^T$ ; 姿态矩阵  $R$  表示为

$$R = [\alpha, \beta, \gamma] = \begin{bmatrix} \alpha_x & \beta_x & \gamma_x \\ \alpha_y & \beta_y & \gamma_y \\ \alpha_z & \beta_z & \gamma_z \end{bmatrix} \quad (4)$$

结合式(1)一式(3),可得式(4)中各分量: $\alpha_x = x_2 - x_1$ ,  $\alpha_y = y_2 - y_1$ ,  $\alpha_z = z_2 - z_1$ ,  $\beta_x = x_3 - x_1$ ,  $\beta_y = y_3 - y_1$ ,  $\beta_z = z_3 - z_1$ ,  $\gamma_x = y_1 z_2 - y_1 z_3 - y_2 z_1 + y_2 z_3 + y_3 z_1 - y_3 z_2$ ,  $\gamma_y = -x_1 z_2 + x_1 z_3 + x_2 z_1 - x_2 z_3 - x_3 z_1 + x_3 z_2$ ,  $\gamma_z = x_1 y_2 - x_1 y_3 - x_2 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_3 y_2$ 。

## 2 自然坐标表示的运动学方程

### 2.1 基本方程

由图 1 所示,机构中存在 6 组封闭矢量: $O_b O_a A_1 O_b B_1 A_1$ ,  $O_b O_a A_2 O_b B_2 A_2$ , ...,  $O_b O_a A_6 O_b B_6 A_6$ , 根据矢量封闭关系,得到连杆矢量表达式为

$$L_k e_k = P + R a_k - b_k \quad (k=1, \dots, 6) \quad (5)$$

式中: $L_k$  为第  $k$  个连杆杆长; $e_k$  为第  $k$  个连杆单位矢量; $P$  为静坐标系  $O_bxyz$  中动平台位置矢量,即  $P = P_1 = \{x_1, y_1, z_1\}^T$ ;  $R$  为姿态矩阵,如式(4)所示; $a_k$  为动坐标系  $O_a\alpha\beta\gamma$  中动平台各个顶点  $A_k$  坐标,即  $a_k = \{a_{k\alpha}, a_{k\beta}, a_{k\gamma}\}^T$ ;  $b_k$  为静坐标系  $O_bxyz$  中静平台各个顶点  $B_k$  坐标,即  $b_k = \{b_{kx}, b_{ky}, b_{kz}\}^T$ 。对图 1 所示机构简图,因动、静平台均为平面布置,所以  $a_k$ 、 $b_k$  的  $\gamma$  轴和  $z$  轴分量均为 0,即  $a_{k\gamma} = b_{kz} = 0$ ,也即  $a_k = \{a_{k\alpha}, a_{k\beta}, 0\}^T$ ,  $b_k = \{b_{kx}, b_{ky}, 0\}^T$ ,可见动、静平台的顶点坐标也可以通过 4 个变量  $r_a$ 、 $r_b$ 、 $\theta_a$ 、 $\theta_b$  来表示,各点坐标进一步表示如下:

$$\begin{aligned} a_k &= \{a_{k\alpha}, a_{k\beta}, a_{k\gamma}\}^T = \{r_a \cos \varphi_k, r_a \sin \varphi_k, 0\}^T, \\ b_k &= \{b_{kx}, b_{ky}, b_{kz}\}^T = \{r_b \cos \beta_k, r_b \sin \beta_k, 0\}^T \end{aligned} \quad (6)$$

其中:

$$\varphi_k = \frac{(k-1)\pi}{3} - \theta_a; \beta_k = \frac{(k-1)\pi}{3} - \theta_b, \quad k=1, 3, 5;$$

$$\varphi_k = \frac{(k-2)\pi}{3} + \theta_a; \beta_k = \frac{(k-2)\pi}{3} + \theta_b, \quad k=2, 4, 6.$$

令  $W$  为动平台在动坐标系中的位置矢量,  $W = \{W_x, W_y, W_z\}^T$ , 则存在  $P = RW$ , 结合  $R$  的正交性,得  $W = R^T P$ 。将  $a_k$ 、 $b_k$ 、 $P$ 、 $R$  和  $W$  代入式(5),两边与自身进行矢量点乘,得到 6 个杆长平方标量方程式如下(此处省略下标  $k$ ):

$$L^2 - r_a^2 - r_b^2 = -2b_{kx} P_x - 2b_{ky} P_y + 2a_{k\alpha} W_x + 2a_{k\beta} W_y - 2\alpha_x (a_{k\alpha} b_{kx}) - 2\alpha_y (a_{k\alpha} b_{ky}) - 2\beta_x (a_{k\beta} b_{kx}) - 2\beta_y (a_{k\beta} b_{ky}) + P_p \quad (7)$$

式中  $P_p$ 、 $P_x$ 、 $P_y$ 、 $W_x$ 、 $W_y$ 、 $\alpha_x$ 、 $\alpha_y$ 、 $\beta_x$ 、 $\beta_y$  9 个未知数之间由动平台的位置和姿态各个参数联系起来,且 9 个未知数的系数由平台结构参数和杆长参数决定。其中,  $P_p$  为位置矢

量  $\mathbf{P}$  模长平方;  $P_x$  为  $\mathbf{P}$  在  $x$  方向上的投影, 即  $P_x = \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}$ , 类似有:  $P_y = \mathbf{P} \cdot \mathbf{y}$ ,  $W_x = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\alpha}$ ,  $W_y = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\beta}$ ;  $\alpha_x$  为  $\boldsymbol{\alpha}$  在  $x$  方向上的投影, 即  $\alpha_x = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}$ , 同理:  $\alpha_y = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{y}$ ,  $\beta_x = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x}$ ,  $\beta_y = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{y}$ 。

## 2.2 运动学方程

从式(7)出发, 通过对  $P_p$ 、 $P_x$ 、 $P_y$ 、 $W_x$ 、 $W_y$ 、 $\alpha_x$ 、 $\alpha_y$ 、 $\beta_x$ 、 $\beta_y$  9 个未知数进行移项、整理, 可得:

式中:

$$\begin{cases} P_p - k_0(\alpha_x + \beta_y)/2 = C_1 \\ P_x - k_1(\alpha_x - \beta_y)/2 = C_2 \\ P_y + k_1(\alpha_y + \beta_x)/2 = C_3 \\ W_x - k_2(\alpha_x - \beta_y)/2 = C_4 \\ W_y + k_2(\alpha_y + \beta_x)/2 = C_5 \\ (\alpha_y - \beta_x)/2 = C_6 \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} k_0 = 2r_a r_b \cos(\theta_b - \theta_a); \\ k_1 = r_a \sin(\theta_b + 2\theta_a) \csc(\theta_b - \theta_a); \\ k_2 = r_b \sin(2\theta_b + \theta_a) \csc(\theta_b - \theta_a); \\ C_1 = \frac{1}{6}(L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + L_4^2 + L_5^2 + L_6^2 - 6r_b^2 - 6r_a^2); \\ C_2 = \frac{-1}{12r_b} \csc(\theta_b - \theta_a) [\sqrt{3}(L_3^2 - L_4^2 - L_5^2 + L_6^2) \cos\theta_a + (-2L_1^2 - 2L_2^2 + L_3^2 + L_4^2 + L_5^2 + L_6^2) \sin\theta_a]; \\ C_3 = \frac{1}{12r_b} \csc(\theta_b - \theta_a) [(2L_1^2 - 2L_2^2 - L_3^2 + L_4^2 - L_5^2 + L_6^2) \cos\theta_a + \sqrt{3}(L_3^2 + L_4^2 - L_5^2 - L_6^2) \sin\theta_a]; \\ C_4 = \frac{-1}{12r_a} \csc(\theta_b - \theta_a) [\sqrt{3}(L_3^2 - L_4^2 - L_5^2 + L_6^2) \cos\theta_b + (-2L_1^2 - 2L_2^2 + L_3^2 + L_4^2 + L_5^2 + L_6^2) \sin\theta_b]; \\ C_5 = \frac{1}{12r_a} \csc(\theta_b - \theta_a) [(2L_1^2 - 2L_2^2 - L_3^2 + L_4^2 - L_5^2 + L_6^2) \cos\theta_b + \sqrt{3}(L_3^2 + L_4^2 - L_5^2 - L_6^2) \sin\theta_b]; \\ C_6 = \frac{1}{12r_a r_b} \csc(\theta_b - \theta_a) [(L_1^2 - L_2^2 + L_3^2 - L_4^2 + L_5^2 - L_6^2)] \end{cases} \quad (9)$$

将 9 个未知数的自然坐标代入式(8)后可得如下 6 个一次或二次形多项式方程组:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \frac{1}{2}k_0(-x_1 + x_2 - y_1 + y_3) = C_1 \quad (10)$$

$$x_1 - \frac{1}{2}k_1(-x_1 + x_2 + y_1 - y_3) = C_2 \quad (11)$$

$$y_1 + \frac{1}{2}k_1(-x_1 + x_3 - y_1 + y_2) = C_3 \quad (12)$$

$$x_1(-x_1 + x_2) + y_1(-y_1 + y_2) + z_1(-z_1 + z_2) - \frac{1}{2}k_2(-x_1 + x_2 + y_1 - y_3) = C_4 \quad (13)$$

$$x_1(-x_1 + x_3) + y_1(-y_1 + y_3) + z_1(-z_1 + z_3) + \frac{1}{2}k_2(-x_1 + x_2 + y_1 - y_3) = C_5 \quad (14)$$

$$\frac{1}{2}(x_1 - x_3 - y_1 + y_2) = C_6 \quad (15)$$

## 3 输入奇异轨迹方程

针对平面平台型 6-DOF 并联机器人的输入奇异性进

$$\begin{cases} x_1^2 + k_0(x_1 + \frac{x_1}{k_1} - x_2) + y_1^2 + z_1^2 = C_1 + \frac{k_0 C_2}{k_1} \\ \frac{-k_2 x_1 + (C_3 - y_1) y_1 + k_1 [-x_1^2 + x_1 x_2 + C_6 y_1 + z_1(-z_1 + z_2)]}{k_1} = -\frac{k_2 C_2}{k_1} + C_4 \\ \frac{C_6 k_1 x_1 - C_3 x_1 + k_2 y_1 - 2C_2 y_1 + 3x_1 y_1 + k_1 x_1 y_1 - k_1 x_2 y_1 + k_1 z_1^2 - k_1 z_1 z_3}{k_1} = \frac{k_2 C_3}{k_1} - C_5 \\ \frac{1}{k_1^2} [-2C_6 k_1 x_1 - 2C_3(x_1 + k_1 x_1 - k_1 x_2) - 2C_2 y_1 + 2x_1 y_1 + 2k_1 x_1 y_1 - 2k_1 x_2 y_1 + k_1^2 z_1^2 - k_1^2 z_1 z_2 - k_1^2 z_1 z_3 + k_1^2 z_2 z_3] = -\frac{2C_6 k_1 C_2 + 2C_2 C_3}{k_1^2} \\ \frac{-2C_6 k_1 y_1 + y_1(-2C_3 + y_1) + k_1^2 [x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 + (z_1 - z_2)^2]}{k_1^2} = 1 - \frac{(C_6 k_1 + C_3)^2}{k_1^2} \\ \frac{1}{k_1^2} \{ (2+k_1)^2 x_1^2 - 2k_1(2+k_1)x_1 x_2 + k_1^2 x_2^2 - 4C_2 [(2+k_1)x_1 - k_1 x_2] + 2C_6 k_1 y_1 - 2C_3 y_1 + y_1^2 + k_1^2 z_1^2 - 2k_1^2 z_1 z_3 + k_1^2 z_3^2 \} = 1 - \frac{4C_2^2}{k_1^2} - \frac{(C_6 k_1 - C_3)^2}{k_1^2} \end{cases} \quad (20)$$

行研究, 并对输入奇异的奇异类型进行讨论。

### 3.1 自然坐标表示的新雅可比矩阵

由  $\boldsymbol{\alpha}$  和  $\boldsymbol{\beta}$  的正交性和归一性

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0; \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha} = 1; \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta} = 1 \quad (16)$$

可得 9 个自然坐标变量的 3 个约束方程:

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1) + (z_2 - z_1)(z_3 - z_1) = 0 \quad (17)$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = 1 \quad (18)$$

$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = 1 \quad (19)$$

至此, 得到 9 个未知数的 9 个方程: 式(10)一式(15), 式(17)一式(19)。

观察式(11)、式(12)和式(15)最高次为一次多项式, 这里先求出  $x_3$ 、 $y_2$ 、 $y_3$  对  $x_1$ 、 $y_1$ 、 $z_1$ 、 $x_2$ 、 $z_2$ 、 $z_3$  的线性表示, 再带回剩余的 6 个方程, 可得式(10)、式(13)、式(14)、式(17)、式(18)和式(19)的关于 6 个变量  $x_1$ 、 $y_1$ 、 $z_1$ 、 $x_2$ 、 $z_2$ 、 $z_3$  的 6 个二次多项式方程。并进行变量和常数项的分离, 最终得到如下方程组:

由式(20)可以看出,等号左侧全部是动平台自然坐标相关变量,支腿变量全部在等号右侧,即:动平台变量项和支腿变量项完全分离。将式(9)带入式(20),令 $L_i = \sqrt{S_i}$ , ( $i=1\sim 6$ ),并对式(20)的运动学方程对 $S_i$ 求一次偏导数得到6个方程,统一表示成矢量形式为

$$\mathbf{J}_1 \cdot \{\dot{\mathbf{S}}\} = 0 \quad (21)$$

式中: $\mathbf{S} = \{S_1, \dots, S_6\}^T$ ;  $\mathbf{J}_1$ 为输入雅可比矩阵,是含有6个输入变量 $\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6\}^T$ 和平台结构参数 $r_a, r_b, \theta_a, \theta_b$ 的 $6 \times 6$ 维矩阵。

### 3.2 输入奇异轨迹方程及其讨论

当雅可比 $\mathbf{J}_1$ 行列式为0时,输入关节位形处于奇异状态,其奇异轨迹方程表示为

$$\det[\mathbf{J}_1] = 0 \quad (22)$$

式(22)表示的输入奇异轨迹展开后每一项均是不同 $S_i$ 的三次方组合。因此,式(22)表示输入奇异和边界奇异的解析表达式,这是采取自然坐标方法描述所得到的新结论。

如果使 $\det[\mathbf{J}_1] = 0$ 成立,那么,由式(22)可以得到3大类输入奇异:

第一大类,已知5条支腿长,如果 $\det[\mathbf{J}_1] = 0$ ,则可以得到第6条支腿的约束情况;

第二大类,已知4条支腿长,如果 $\det[\mathbf{J}_1] = 0$ ,则可以得到剩下的第5条和第6条支腿的相互约束情况;

第三大类,已知3条支腿长,如果 $\det[\mathbf{J}_1] = 0$ ,则可以得到剩下的3条支腿的相互约束情况。

## 4 输入奇异性算例分析

以平面平台型6-UPS并联机器人为例,结构如图2所示

将结构参数带入 $\det[\mathbf{J}_1]$ 后可得其数值形式表达式,即:

$$\begin{aligned} \det[\mathbf{J}_1] = & -4.00615 \times 10^{-6} S_1^3 + 0.0000120184 S_1^2 S_2 - 0.0000120184 S_1 S_2^2 + 4.00615 \times 10^{-6} S_2^3 - 0.000045852 S_1^2 S_3 + \\ & 0.000091704 S_1 S_2 S_3 - 0.000045852 S_2^2 S_3 - 0.000147688 S_1 S_3^2 + 0.000147688 S_2 S_3^2 - 0.0000911784 S_3^3 + \\ & 0.000225283 S_1^2 S_4 - 0.000450566 S_1 S_2 S_4 + 0.000225283 S_2^2 S_4 + 0.00137552 S_1 S_3 S_4 - 0.00137552 S_2 S_3 S_4 + \\ & 0.000940945 S_3^2 S_4 - 0.00314042 S_1 S_4^2 + 0.00314042 S_2 S_4^2 - 0.00228368 S_3 S_4^2 - 0.00075331 S_4^3 - \\ & 0.000225283 S_1^2 S_5 + 0.000450566 S_1 S_2 S_5 - 0.000225283 S_2^2 S_5 - 0.00137552 S_1 S_3 S_5 + 0.00137552 S_2 S_3 S_5 - \\ & 0.000940945 S_3^2 S_5 + 0.00628084 S_1 S_4 S_5 - 0.00628084 S_2 S_4 S_5 + 0.00456735 S_3 S_4 S_5 + 0.00225993 S_4^2 S_5 - \\ & 0.00314042 S_1 S_5^2 + 0.00314042 S_2 S_5^2 - 0.00228368 S_3 S_5^2 - 0.00225993 S_4 S_5^2 + 0.00075331 S_5^3 + 0.000045852 S_1^2 S_6 - \\ & 0.000091704 S_1 S_2 S_6 + 0.000045852 S_2^2 S_6 + 0.000295376 S_1 S_3 S_6 - 0.000295376 S_2 S_3 S_6 + 0.000273535 S_3^2 S_6 - \\ & 0.00137552 S_1 S_4 S_6 + 0.00137552 S_2 S_4 S_6 - 0.00188189 S_3 S_4 S_6 + 0.00228368 S_4^2 S_6 + 0.00137552 S_1 S_5 S_6 - \\ & 0.00137552 S_2 S_5 S_6 + 0.00188189 S_3 S_5 S_6 - 0.00456735 S_4 S_5 S_6 + 0.00228368 S_5^2 S_6 - 0.000147688 S_1 S_6^2 + \\ & 0.000147688 S_2 S_6^2 - 0.000273535 S_3 S_6^2 + 0.000940945 S_4 S_6^2 - 0.000940945 S_5 S_6^2 + 0.0000911784 S_6^3 \end{aligned} \quad (23)$$

式(23)是输入奇异的奇异轨迹数值表达式,下面研究机构的各种奇异类型以及奇异轨迹在空间的分布情况。如果使 $\det[\mathbf{J}_1] = 0$ 成立,那么,按照3.2节内容得到的3大类输入奇异性进行分析。

第一大类,由于平面平台型6-UPS并联机器人存在一次平面对称和两次旋转对称<sup>[16]</sup>,所以,只需要讨论其中一条支腿的约束情况即可,即:已知其中任意5条支腿长,分析含有第6条支腿的约束奇异方程。根据课题组正在

示,其几何结构参数 $\theta_a = 0.28618\pi \text{ rad}$ ,  $\theta_b = 0.046988\pi \text{ rad}$ ,  $r_a = 0.849864 \text{ m}$ ,  $r_b = 0.849864 \text{ m}$ 。动、静平台的6对顶点 $A_i, B_i$  ( $i=1, \dots, 6$ )分别循环对称布置在一个平面圆周上,如图3所示。

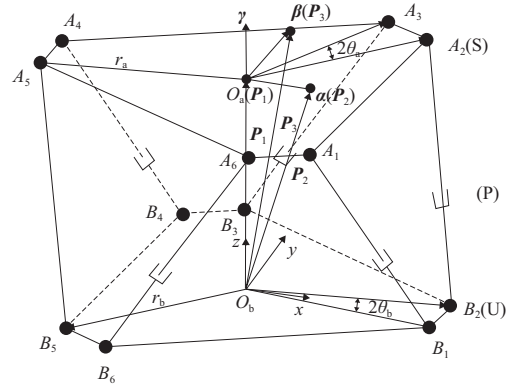


图2 平面平台型6-UPS并联机器人简图

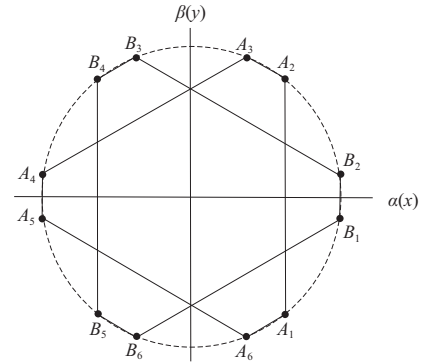


图3 6-UPS并联机器人的顶点布置示意图

研制的一台物理样机,其构型选择的电缸行程为0.5 m,平衡位置在6条支腿长均为1.36 m处,所以,6条支腿长 $L_i$  ( $i=1, \dots, 6$ )均在 $(1.36 \pm 0.25) \text{ m}$ 范围内运动,那么, $S_i$  ( $i=1, \dots, 6$ )  $\in [1.2321 \text{ m}^2, 2.5921 \text{ m}^2]$ 。因此,随机取一组数据: $S_2 = 2 \text{ m}^2$ ,  $S_3 = 1.8 \text{ m}^2$ ,  $S_4 = 1.8 \text{ m}^2$ ,  $S_5 = 1.9 \text{ m}^2$ ,  $S_6 = 2.5 \text{ m}^2$ ,则可以得到 $S_1$ 的奇异轨迹约束方程:

$$\det[\mathbf{J}_1] = 0.0000871989 - 0.0000938314 S_1 + 0.000033605 S_1^2 - 4.00615 \times 10^{-6} S_1^3 = 0 \quad (24)$$



式(24) 奇异轨迹方程对应的奇异轨迹曲线如图 4 所示。

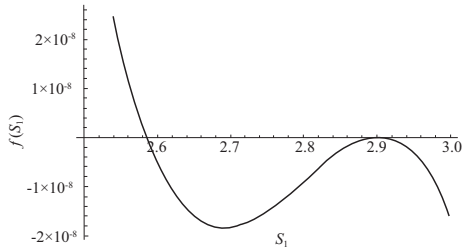


图 4 S<sub>1</sub> 的边界奇异轨迹曲线

从图 4 中曲线可知,当  $S_1 = 2.58634 \text{ m}^2$ ,  $S_1 = 2.90101 \text{ m}^2$  和  $S_1 = 2.90101 \text{ m}^2$  时,  $\det[\mathbf{J}_1] = 0$ , 输入关节发生奇异位形。相反,如果  $S_1$  不等于这 3 个数值时,这组腿长处于非奇异位形处。

第二大类,已知 4 条支腿长,如果  $\det[\mathbf{J}_1] = 0$ , 则可以得到第 5 和第 6 条支腿的相互约束情况。

根据平台选出任意两条支腿有 15 种组合,随机取一组  $S_3 = 1.8 \text{ m}^2$ ,  $S_4 = 2.0 \text{ m}^2$ ,  $S_5 = 1.9 \text{ m}^2$ ,  $S_6 = 2.5 \text{ m}^2$ , 则可以得到  $S_1, S_2$  的奇异轨迹约束方程, 即:

$$\det[\mathbf{J}_1] = 0.0000926129 - 0.000200058S_1 + 0.0000546247S_1^2 - 4.00615 \times 10^{-6}S_1^3 + 0.000200058S_2 - 0.000109249S_1S_2 + 0.0000120184S_1^2S_2 + 0.0000546247S_2^2 - 0.0000120184S_1S_2^2 + 4.00615 \times 10^{-6}S_2^3 = 0 \quad (25)$$

式(25) 奇异轨迹方程对应的奇异轨迹等高线如图 5 所示。

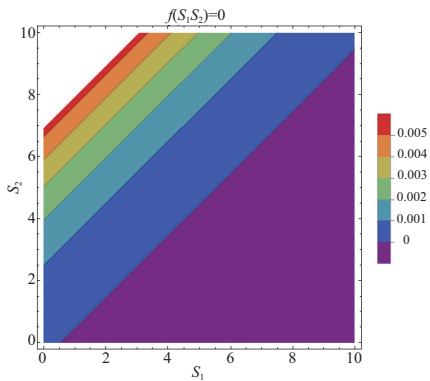


图 5 S<sub>1</sub> 和 S<sub>2</sub> 的边界奇异轨迹曲面

从图 5 可知,当  $S_1$  和  $S_2$  取值在蓝色和紫色交线上时,  $\det[\mathbf{J}_1] = 0$ , 输入关节发生奇异位形。相反,如果  $S_1$  和  $S_2$  取值不在蓝色和紫色交线上时,这组腿长处于非奇异位形处(本刊黑白印刷,相关疑问可咨询作者)。

第三大类,已知 3 条支腿长,如果  $\det[\mathbf{J}_1] = 0$ , 则可以得到剩下的 3 条支腿的相互约束情况。

根据平台支腿选出任意 3 条支腿有 20 种组合,随机取 1 组  $S_4 = 2.0 \text{ m}^2$ ,  $S_5 = 1.9 \text{ m}^2$ ,  $S_6 = 2.5 \text{ m}^2$ , 则可以得到  $S_1, S_2, S_3$  的奇异轨迹约束方程, 即:

$$\det[\mathbf{J}_1] = 0.00206909 - 0.00129833S_1 + 0.000137158S_1^2 - 4.00615 \times 10^{-6}S_1^3 + 0.00129833S_2 - 0.000274317S_1S_2 + 0.0000120184S_1^2S_2 + 0.000137158S_2^2 -$$

$$0.0000120184S_1S_2^2 + 4.00615 \times 10^{-6}S_2^3 - 0.0022029S_3 + 0.000875992S_1S_3 - 0.000045852S_1^2S_3 - 0.000875992S_2S_3 + 0.000091704S_1S_2S_3 - 0.000045852S_2^2S_3 + 0.000777932S_3^2 - 0.000147688S_1S_3^2 + 0.000147688S_2S_3^2 - 0.0000911784S_3^3 = 0 \quad (26)$$

式(26) 奇异轨迹方程对应的奇异轨迹曲面如图 6 所示。

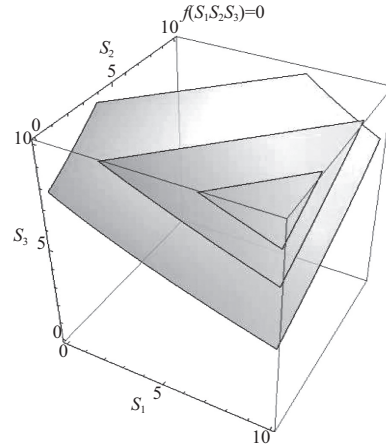


图 6 S<sub>1</sub>、S<sub>2</sub> 和 S<sub>3</sub> 的边界奇异轨迹曲面

从图 6 可知,当  $S_1, S_2$  和  $S_3$  取值同时在图 6 曲面上时,  $\det[\mathbf{J}_1] = 0$ , 输入关节发生奇异位形。相反,如果  $S_1, S_2$  和  $S_3$  中只要有一个数值不在图 6 所示曲面上时,这组腿长处于非奇异位形处。

## 5 结语

1) 采用自然坐标方法表示位置  $\mathbf{P}$  和姿态  $\mathbf{R}$ , 将 1 组 6 个运动学模型和 3 个约束模型都表示为二次形方程组。这些模型含有二次项、一次项和常数项,最高次项为二次,由此建立起一类最简单非线性的平面平台型 6-DOF 并联机器人的运动学模型和约束模型;求导后得到的雅可比矩阵仅含有一次项和常数项,最高次项为一次,而且位置  $\mathbf{P}$  和姿态  $\mathbf{R}$  均是自然坐标统一表示,所以不需要无量纲化处理,为优化奇异轨迹的解析表达式提供了基础保证。

2) 使用自然坐标方法,顺利地推动平面平台型 6-DOF 并联机器人的输入奇异性研究。运动学模型经过和约束模型进行结合,得到其输入奇异的解析表达式。进而讨论输入奇异的 3 种奇异类型,并研究奇异轨迹在空间的分布情况。首次提出给定部分杆长平方,剩余的杆长平方存在边界约束,不可以像串联机构没有边界。并通过典型算例完全绘制了输入奇异的奇异轨迹点、线和面图。

3) 进一步研究表明,基于自然坐标方法的奇异性研究能够为基于运动学正解求解平面平台型 6-DOF 并联机器人位置和姿态耦合的六维无奇异工作空间并实现三维完全可视化描述奠定坚实基础。由于篇幅所限,关于无奇异工作空间的有关成果将另文发表。

### 参考文献:

[1] TSAI K Y, LIN J C, LO Y. Six-DOF parallel manipulators with

- maximal singularity-free joint space or workspace[J]. *Robotica*, 2014,32(3):401-411.
- [2] YANG X L, WU H T, CHEN B, et al. A dual quaternion approach to efficient determination of the maximal singularity-free joint space and workspace of six-DOF parallel robots[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2018, 129:279-292.
- [3] HUNT K H. Structural kinematics of in-parallel-actuated robot-arms[J]. *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, 1983, 105(4):705-712.
- [4] HUNT K H. Kinematic geometry of mechanisms[M]. Oxford: Clarendon Press, 1978.
- [5] 李艳文, 黄真, 高峰. 一种新的奇异研究方法及其应用实例[J]. *燕山大学学报*, 2004, 28(1):40-44, 48.
- [6] CAO Y, GOSSELIN C, ZHOU H, et al. Orientation-singularity analysis and orientationability evaluation of a special class of the Stewart-Gough parallel manipulators[J]. *Robotica*, 2013, 31(8):1361-1372.
- [7] BONEV I A, ZLATANOV D, GOSSELIN C M. Singularity analysis of 3-DOF planar parallel mechanisms via screw theory[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2003, 125(3):573-581.
- [8] MERLET J P. Singular configurations of parallel manipulators and Grassmann geometry[J]. *The International Journal of Robotics Research*, 1989, 8(5):45-56.
- [9] BEN-HORIN P, SHOHAM M. Singularity analysis of a class of parallel robots based on Grassmann-Cayley algebra[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2006, 41(8):958-970.
- [10] BEN-HORIN P, SHOHAM M. Application of Grassmann-Cayley algebra to geometrical interpretation of parallel robot singularities[J]. *The International Journal of Robotics Research*, 2009, 28(1):127-141.
- [11] FICHTER E F. A Stewart platform-based manipulator: general theory and practical construction[J]. *The International Journal of Robotics Research*, 1986, 5(2):157-182.
- [12] CHOI H B, KONNO A, UCHIYAMA M. Analytic singularity analysis of a 4-DOF parallel robot based on Jacobian deficiencies[J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2010, 8(2):378-384.
- [13] GOSSELIN C, ANGELES J. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains[J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1990, 6(3):281-290.
- [14] CECCARELLI M, MAURIZIO DECIO FINO P, MANUEL JIMENEZ J. Dynamic performance of CaPaMan by numerical simulations[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2002, 37(3):241-266.
- [15] WANG R B, WU H T, LIU Y L, et al. A numerical method for forward kinematics of general Stewart manipulator using natural coordinates[J]. *Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing*, 2019, 13(1):JAMDSM0002.
- [16] LIU Y, WU H, YANG Y, et al. Symmetrical workspace of 6-UPS parallel robot using tilt and torsion angles[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2018, 2018:1-10.

收稿日期:2022-05-24

#### (上接第 27 页)

- [3] MERLET J P. *Parallel robots*[M]. New York: Springer-Verlag New York Inc, 2005.
- [4] 鲁凯. 基于神经网络的六自由度运动平台的正解方法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2005.
- [5] 文家富. 六自由度运动平台运动学位置正解研究[D]. 天津: 中国民航大学, 2011.
- [6] 武锡铜. 高精度六自由度并联平台控制系统设计[D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2018.
- [7] 彭志文, 高宏力, 文刚, 等. 三自由度并联机械手动力学分析与控制[J]. *机械设计与制造*, 2017(9):243-245, 249.
- [8] 胡启国, 骆艳丽, 王宇谦. 基于多目标遗传算法的 Stewart 平台运动学正解解算[J]. *机械传动*, 2019, 43(3):48-53.
- [9] 文刚. 六自由度并联机器人控制算法研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2017.
- [10] 韩磊, 刁燕, 张希斌, 等. 基于改进牛顿迭代法的手腕偏置型六自由度关节机器人逆解算法[J]. *机械传动*, 2017, 41(1):127-130, 150.
- [11] 白燕燕, 曹军, 张福元, 等. 基于粒子群算法优化卷积神经网络结构[J]. *内蒙古大学学报(自然科学版)*, 2019, 50(1):84-88.
- [12] 荆学东, 张英驰, 王梓腾, 等. 神经网络-牛顿改进算法求解 Stewart 平台正解[J]. *机械设计与制造*, 2019(12):251-254.
- [13] 钟有博. 六自由度并联平台的建模与仿真研究[D]. 天津: 天津工业大学, 2016.
- [14] 陈川雄, 张学明, 汪小志. 苹果采摘六自由度机械手设计——基于迭代学习和智能轨迹规划[J]. *农机化研究*, 2016, 38(7):65-69.
- [15] 杨恒, 薛开. 六自由度并联机构变搜索原点迭代正解方法[J]. *应用科技*, 2016, 43(2):54-58.
- [16] SELIG J M, LI H. A geometric Newton-Raphson method for Gough-Stewart platforms[C]//*Computational Kinematics*, 2009:183-190.
- [17] ZHANG H Q, FANG H R, JIANG B S, et al. A Newton-Raphson and BP neural network hybrid algorithm for forward kinematics of parallel manipulator[C]//*2019 WRC Symposium on Advanced Robotics and Automation (WRC SARA)*. Beijing, China: IEEE, :122-127.
- [18] 郝轶宁, 王军政, 汪首坤, 钟秋海. 基于神经网络的六自由度摇摆台位置正解[J]. *北京理工大学学报*, 2003, 23(6):736-739.
- [19] ZHANG C D, SONG S M. Forward kinematics of a class of parallel (Stewart) platforms with closed-form solutions[J]. *Journal of Robotic Systems*, 1992, 9(1):93-112.

收稿日期:2022-03-23