

# 基于BP神经网络-牛顿迭代法的6-DOF并联机器人正解

段志琴,高宏力,董林威

(西南交通大学 机械工程学院,四川 成都 610031)

**摘要:**由于6自由度并联机器人基座与末端执行器之间存在多条运动链,使其运动学正解难度较大,并且存在多解。针对并联机器人的运动学高效求解,提出一种基于神经网络和牛顿迭代法混合算法,利用神经网络模型的非线性映射能力,将输入杆长映射到上平台位姿,但映射出来的位姿精度较低,再利用迭代法求解,最后在Matlab中建立物理模型进行运算仿真。仿真结果表明:神经网络-牛顿混合求解能提高运算效率,并且有效降低误差,具有广泛的应用价值。

**关键词:**6自由度并联机器人;BP神经网络;Newton-Raphson迭代法;运动学正解

**中图分类号:**TP242 **文献标志码:**B **文章编号:**1671-5276(2023)05-0024-04

## Forward Kinematics Solution of 6-DOF Parallel Robot Based on BP Neural Network and Newton Hybrid Algorithm

DUAN Zhiqin, GAO Hongli, DONG Linwei

(School of Mechanical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

**Abstract:** To overcome the difficulty in forward kinematics solution of 6-DOF parallel robot due to its complicated kinematic chains between the bases of the parallel robot and the end effector, and aimed at the efficient solution of kinematics of the parallel robot against its multiple solutions, a hybrid algorithm based on neural network and Newton iteration is proposed. With the nonlinear mapping ability of the network model, the input rod length is mapped to the pose of the upper platform, and furthermore, the iterative method is used to solve the low accuracy of the mapped pose. The physical model is established in Matlab for calculation simulation. The simulation results show that the neural network-Newton hybrid solution can improve the computational efficiency and effectively reduce errors, which has a wide range of application values.

**Keywords:** 6-DOF parallel robot; BP neural network; Newton-Raphson method; positive kinematics solution

## 0 引言

6自由度并联机器人具有刚度高和无积累误差等特点,相对于串联机器人,并联机器人运动精度更高、刚性更大,因此,其承载范围更大,动态特性也有很大提升<sup>[1-3]</sup>。

并联机构的运动学正解问题是相当复杂的,该问题同样是6自由度并联机器人研究的一个重点<sup>[4]</sup>。针对并联平台的运动学正解,目前常用的方法主要是解析法、数值法和其它智能算法。其中解析法运算难度较大,是通过降低未知数维度的方式形成只含一个变量的求解方程,该方法求解过程复杂且容易产生多解<sup>[5]</sup>。而数值法可以分为多维迭代搜索和优化方法两类。解析法能求解出所有可能的解,精度高,但求解时间长,效率低;数值法能够高效地计算出解,但是解不出全部解<sup>[6]</sup>。6自由度并联机器人的运动学正解是后续动力学模型建立以及高精度控制等的基础,在分析传统算法的基础上,结合BP神经网络和牛顿迭代(Newton-Raphson)形成BP-NR算法用于运动学正解。

## 1 6自由度并联机器人模型

6自由度并联机器人结构如图1所示,该结构采用6个串联的SPS结构连接动、静平台,其中球铰为被动副,移动副为驱动副<sup>[7]</sup>。令 $\{s\}$ 和 $\{b\}$ 分别表示基坐标系和物体运动系,且 $\{d_i\}$ 为从关节 $\{A_i\}$ 指向关节 $\{B_i\}$ 的向量,其中 $i=1, \dots, 6$ 。参照图1,作如下规定:

$p \in \mathbf{R}^3 = p'$ , 在 $\{s\}$ 系中描述;

$a_i \in \mathbf{R}^3 = a'_i$ , 在 $\{s\}$ 系中描述;

$b_i \in \mathbf{R}^3 = b'_i$ , 在 $\{b\}$ 系中描述;

$d_i \in \mathbf{R}^3 = d'_i$ , 在 $\{s\}$ 系中描述同;

$R \in S_0(3)$ , 为在 $\{s\}$ 坐标系中 $\{b\}$ 的方向。

为了导出约束方程,在 $\{s\}$ 中建立以下向量关系:

$$d_i = p + R b_i - a_i, i=1, \dots, 6 \quad (1)$$

第 $i$ 条腿的长度用 $s_i$ 表示,有

$$s_i^2 = d_i^T d_i = (p + R b_i - a_i)^T (p + R b_i - a_i) \quad (2)$$

式中: $i=1, \dots, 6$ ;  $a_i$ 和 $b_i$ 均已知。逆运动学显得很直观,给定 $p$ 和 $R$ ,6条杆的长度 $s_i$ 可以直接通过上式确定。

正向运动学则极为复杂:给定 $s_i, i=1, \dots, 6$ , 确定 $p \in R^3 = p'$ 和 $R \in S_0(3)$ , 本文使用 $P=(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)^T$ 来描述上平台的位置,  $S=(s_1, s_2, s_3, s_3, s_4, s_5, s_6)^T$ 来描述杆长信息<sup>[8-9]</sup>。

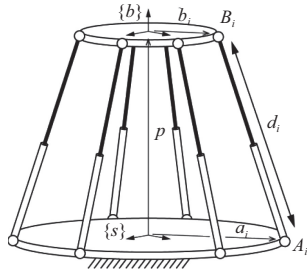


图1 六自由度平台模型

## 2 BP神经网络和迭代的基本思想

迭代法能够精确地解出上平台的位姿数据,并且具有较快的解算速度;但是迭代法的缺点也很明显,对初始值质量要求较高,当初始值 $P_0$ 与精确解相差过大时,可能收敛缓慢甚至无法收敛<sup>[10]</sup>。

神经网络模型需要训练,在文中首先用上述反解算法得到的位姿-杆长数据组。将该数据集输入模型进行训练,当训练精度满足要求后,可完成并联机器人在关节向量空间和平台位姿空间的非线性映射求解,从而也避免了复杂的数学公式推导和大量的计算机编程求解,但是其缺点是求解出来的精度较低,位置精度能够达到 $\pm 3$  mm的误差和角度精度能够达到 $\pm 0.5^\circ$ 的误差<sup>[11]</sup>。

为了改善单独使用牛顿迭代法或神经网络的不足,本文将两种方法相结合,由于神经网络求解能实现非线性映射,求解速度快,但是求解精度低;迭代法求解精度高,但是对初始值要求高。在此将两者优缺点进行互补,整体先通过训练好神经网络求解出位姿的初解,然后再将此初解带到牛顿迭代法里去求解出更加精确的解。这样就实现了求解结果的实时性和高精度。

### 2.1 BP神经网络拟合的正解模型

神经网络模型是近年来应用比较广泛,且热度很高的智能算法,通过模拟生物神经的结构,调整连接节点间的权重值,从而拟合出相应模型。神经网络能够实现多变量系统的处理,多变量的神经网络可以实现多变量输入和输出的拟合,因此网络模型适合应用在多参量系统<sup>[12]</sup>。

由本文第1节的位姿反解公式(2)计算得到本构型并联机器人的杆长-位姿数据集,将其作为训练神经网络的数据样本。训练也即是对网络的连接系数进行学习 and 调节,以使该网络实现给定的输入与输出间的映射关系。经过训练的BP神经网络,对于不是样本集中的输入也能给出合适的输出。该性质称为泛化能力。本文使用的神经网络结构如图2所示,输入、输出网络均为6层,隐藏层为12层。

为了避免BP网络产生过拟合现象,本文将数据分成训练集和验证集。训练集用来计算梯度、更新连接权和阈

值,验证集用来估计误差,若训练集误差降低而验证集误差升高,则停止训练,同时返回具有最小验证集误差的连接权和阈值。使用贝叶斯正则化算法训练神经网络,避免产生过拟合同时提高网络模型的泛化能力。

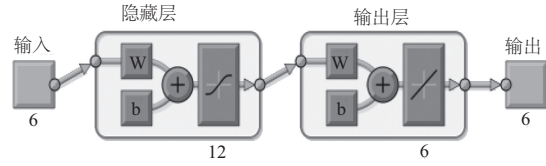


图2 正解的BP神经网络模型

本节选用的两个网络模型评价指标为误差和决定系数,其计算公式分别如式(3)和式(4)所示,误差 $E_i$ 越小,决定系数 $R$ 愈接近1,表明模型的性能愈好。

$$E_i = \hat{y}_i - y_i \quad (3)$$

$$R^2 = \frac{\sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} \quad (4)$$

经过训练后,相关系数误差分布分别如图3、图4所示,表明所得模型的性能表现很好。

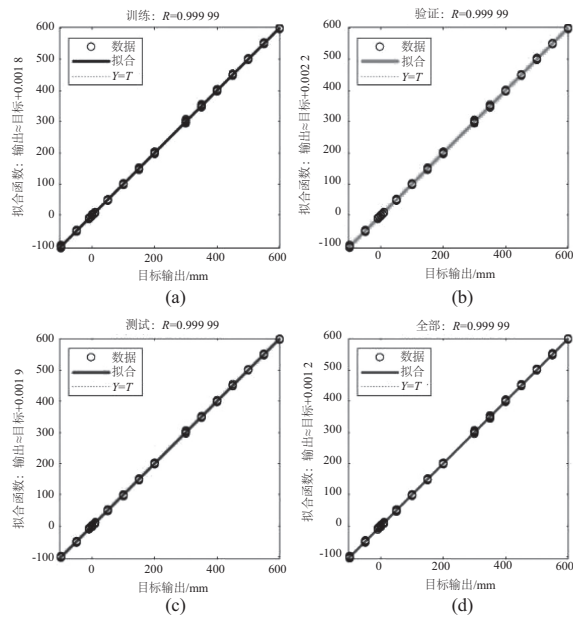


图3 网络的决定系数R

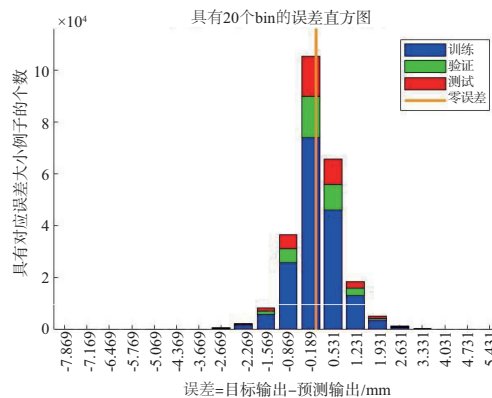


图4 BP网络的预测误差

## 2.2 位姿正解的牛顿迭代法

位姿正解的关键是根据杆长  $S'$  平台中心的位姿  $P$ , 本节采用牛顿迭代法来解含有 6 个参数的非线性方程精确解。

牛顿迭代法的提出本来是用以求解非线性方程, 其主要思想是通过不断利用前值迭代搜寻新值, 以满足相应的方程表达式的方法<sup>[13]</sup>。由于迭代算法的重复操作较多, 且多数时刻需要求解的对象非常复杂, 故利用计算机进行运算操作<sup>[14-15]</sup>。牛顿迭代法的收敛也取决于初值的选择, 且容易陷入局部收敛的情况, 故一般在实际应用时对迭代函数的构建非常重要<sup>[16]</sup>。迭代的过程一般如下。

假设非线性方程为

$$F(P) = S - S' = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^T \quad (5)$$

式中  $f_i = S_i - S'_i, i = 1, 2, \dots, 6$ 。

若规定方程  $F(P) = 0$  的一个近似根为  $P_k$ , 并且在  $P_k$  附近存在一个较容易得到的解  $P_{k+1}$ , 则可以得到:

$$P_{k+1} = P_k - \delta \quad (6)$$

式中  $\delta$  为两解之间存在的偏差值。

将函数在  $P_k$  处用泰勒展开, 并取其线性部分, 则可表示为

$$F(P) \approx F(P_k) + J(P_k)(P - P_k) = 0 \quad (7)$$

$$\text{式中 } J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(X)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(X)}{\partial y} & \dots & \frac{\partial f_1(X)}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial f_2(X)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(X)}{\partial y} & \dots & \frac{\partial f_2(X)}{\partial \gamma} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_6(X)}{\partial x} & \frac{\partial f_6(X)}{\partial y} & \dots & \frac{\partial f_6(X)}{\partial \gamma} \end{bmatrix}$$

由式(6)和式(7)可得

$$P_{k+1} = P_k - J^{-1}F(P_k) \quad (8)$$

定义误差  $\varepsilon = \max \{ |P_{k+1} - P_k| / P_{(k+1)} \}$

通过给定初始值  $P_0$  及允许的误差  $\varepsilon_0$  和最大的迭代次数  $N$ , 将式(8)的  $P_{k+1}$  替换  $P_k$ , 进行迭代求解又一次得到误差  $\varepsilon$ , 直到满足  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  时或达到最大迭代次数时, 退出迭代计算, 得到并联机器人的正解。

## 2.3 神经网络与迭代算法的基本原理

BP-NR 法互补了两种模型算法的缺点<sup>[17]</sup>, 实现了 6 自由度并联机器人运动学正解的实时性和高精度。

通过 BP 神经网络可实现杆长变化到平台位姿变化的非线性映射。在测试前, 将一定数量的杆长-位姿数据作为训练集, 对模型进行训练。此后将 6 个支杆的位移数据输入到已训练完成的网络模型中, 经过模型的拟合求解从而得到上平台的位姿姿态数据。

训练好的神经网络模型能够通过学习不断拟合模型输入输出间的对应关系, 应用在 6 自由度并联机器人上, 可以实现位姿正解<sup>[18]</sup>。训练样本是通过运动学反解得到的, 在平台的运动空间内选一系列不同的位姿向量  $[x, y, z, \alpha, \beta, \gamma]$ , 再通过位置反解求出相应的杆长向量  $[s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6]$ , 这样就可以得到神经网络的训练样本。

Newton-raphson 迭代法, 可以求解出高精度的位姿数据, 但是对初值的要求比较高, 如果初值选取不当会出现

迭代不收敛的情况<sup>[19]</sup>。对此将两种方法的优点相结合, 先用神经网络进行运动学求解, 将求解出来的数据代入迭代法中, 求解出更高精度的位姿数据, 神经网络-迭代法流程如图 5 所示。

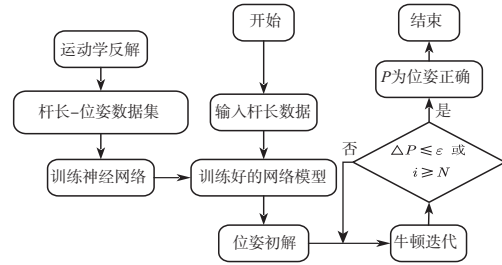


图5 神经网络-迭代法流程图

## 3 实验验证

为了测试网络模型的算法性能, 通过带入一个数据集进行验证, 在此将 150 组位姿数据输入到运动学反解模型中, 得到相应的 150 组杆长数据。将这 150 组杆长数据作为训练完成的 BP 网络模型的输入值, 经过神经网络的拟合映射, 输出与杆长数据相对应的位姿数据。图 6 和图 7 所示为验证所用的模型位姿曲线与杆长数据曲线。

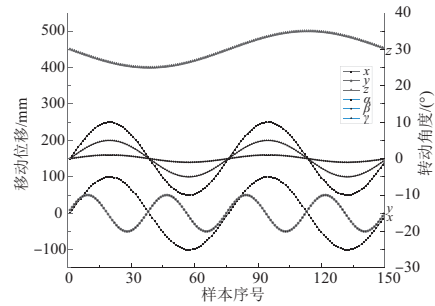


图6 位姿数据

为显著直观地分析 BP-NR 方法在降低运动正解位姿误差方面的效果, 将 BP-NR 方法同仅使用 BP 方法进行比较。

在仅使用牛顿迭代法进行求解时, 设定允许误差  $\varepsilon_0 = 0.01$ , 最大的迭代次数  $N = 100$  时, 150 组数据中有 18 组数据因初始值选取不当而导致算法无法收敛, 无法得到模型的正解。同时计算用时较长, 去除因初始值选取不当无法收敛的位姿-杆长数据组后, 计算剩下的 132 组数据共用时 179.2 s, 平均每组位姿-杆长数据用时约 1.36 s。

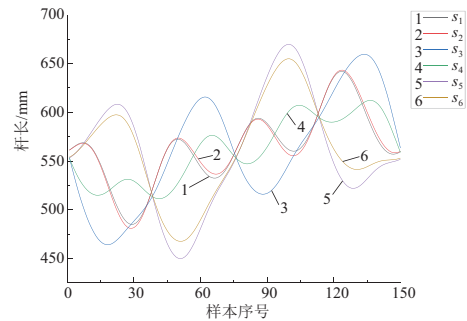


图7 杆长数据

如图8所示,在仅使用已经训练好的BP神经网络对模型进行正运动学求解时仅需0.8s就可计算得到150组

正解数据,但其位姿的误差相对较大,最大幅值如表1所示。

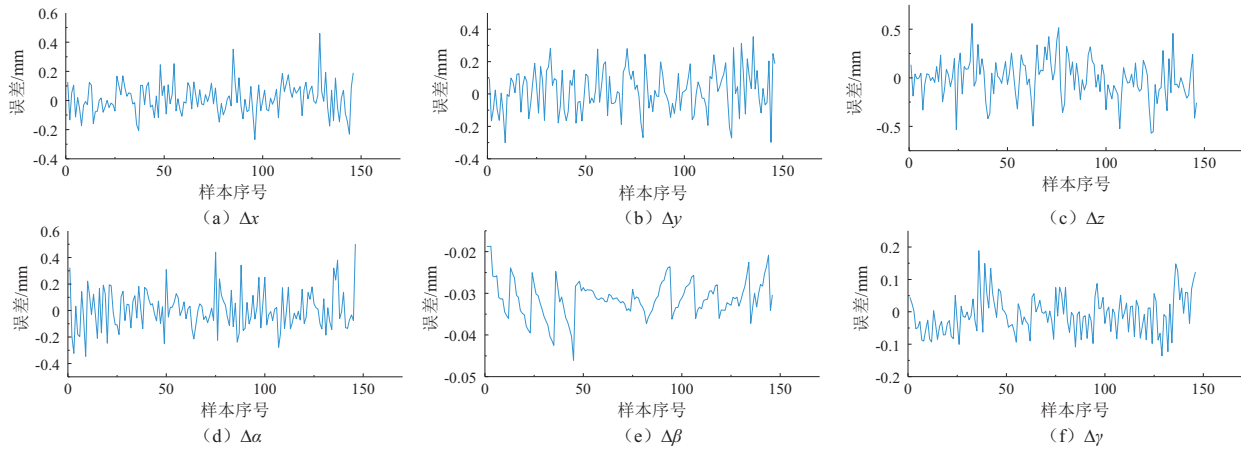


图8 BP-位姿误差

表1 BP法的位姿误差

$\Delta x_{\max}$	$\Delta y_{\max}$	$\Delta z_{\max}$	$\Delta \alpha_{\max}$	$\Delta \beta_{\max}$	$\Delta \gamma_{\max}$
0.459 0	0.353 1	0.569 0	0.501 9	0.046 1	0.188 5

相较BP法,经过迭代后的位姿误差趋近于0,其最大位姿误差如表2所示,同时有效避免了单独使用牛顿迭代法因初始值选取不当无法收敛的问题。图9表示经过BP-NR法后输出的数据与理想的位姿数据间的误差。

使用BP网络的结果当作牛顿迭代法的初始值,可以大幅减少迭代时间,提高计算效率,计算150组数据共用时68.4s,平均用时0.456s。

表2 BP-NR法的位姿误差

$\Delta x_{\max}$	$\Delta y_{\max}$	$\Delta z_{\max}$	$\Delta \alpha_{\max}$	$\Delta \beta_{\max}$	$\Delta \gamma_{\max}$
$2.5 \times 10^{-8}$	$3.8 \times 10^{-7}$	$4.6 \times 10^{-7}$	$2.2 \times 10^{-7}$	$7.2 \times 10^{-9}$	$2.6 \times 10^{-9}$

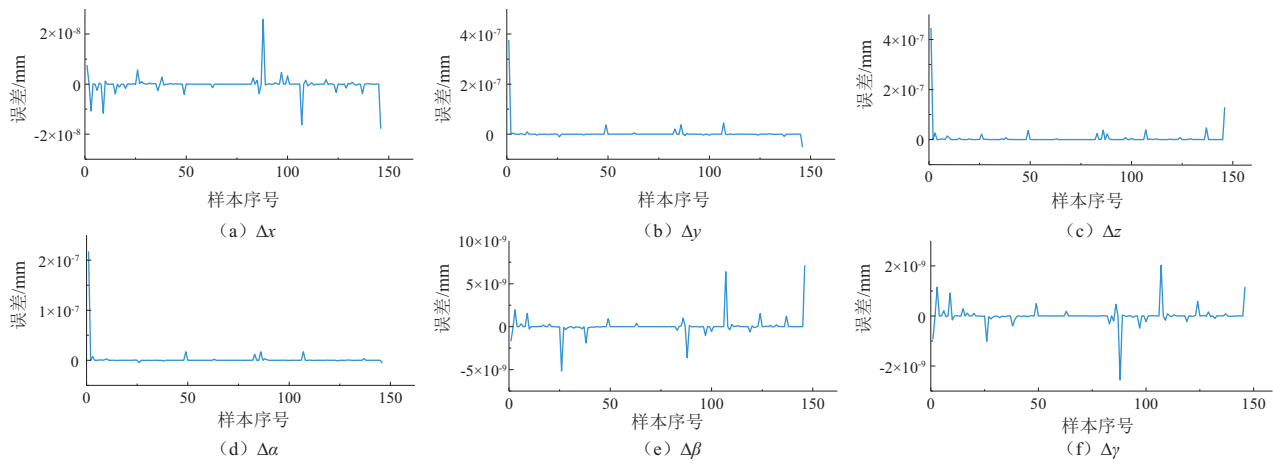


图9 BP-NR 位姿误差

## 4 结语

本文主要针对6自由度并联机器人运动学正解求解难,常规方法求解精度不高等问题进行研究。首先介绍6自由度并联机器人模型;然后分别介绍了神经网络正解和迭代法正解的原理;再提出用两种方法结合起来求解运动学正解;最后通过仿真比较了神经网络和神经网络加迭代的求解精度,得出的结论是神经网络加牛顿迭代能明显提高正解精度。

BP-NR法的正解方法其核心是利用了神经网络的非线性映射能力,能够将杆长数据映射到位姿空间,求解速

度快,节省大量的解算时间。但是这样解算出来的位姿精度不够,所以再引入迭代法,求解更高精度的正解。综上所述,BP-NR法求解正解结合了两种方法的优点,同时它们的优点弥补了对方的不足,实现了6自由度并联机器人运动学正解的实时性和高精度求解。

### 参考文献:

- [1] 黄真,赵永生,赵铁石. 高等空间机构学[M]. 北京:高等教育出版社,2006.
- [2] 陈博,杨健,闫恒,等. IRS-300六轴机器人运动学建模与参数仿真分析[J]. 机械制造与自动化,2021,50(5):88-90,112.

(下转第41页)

- maximal singularity-free joint space or workspace[J]. *Robotica*, 2014,32(3):401-411.
- [2] YANG X L, WU H T, CHEN B, et al. A dual quaternion approach to efficient determination of the maximal singularity-free joint space and workspace of six-DOF parallel robots[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2018, 129:279-292.
- [3] HUNT K H. Structural kinematics of in-parallel-actuated robot-arms[J]. *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, 1983, 105(4):705-712.
- [4] HUNT K H. Kinematic geometry of mechanisms[M]. Oxford: Clarendon Press, 1978.
- [5] 李艳文, 黄真, 高峰. 一种新的奇异研究方法及其应用实例[J]. *燕山大学学报*, 2004, 28(1):40-44, 48.
- [6] CAO Y, GOSSELIN C, ZHOU H, et al. Orientation-singularity analysis and orientationability evaluation of a special class of the Stewart-Gough parallel manipulators[J]. *Robotica*, 2013, 31(8):1361-1372.
- [7] BONEV I A, ZLATANOV D, GOSSELIN C M. Singularity analysis of 3-DOF planar parallel mechanisms via screw theory[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2003, 125(3):573-581.
- [8] MERLET J P. Singular configurations of parallel manipulators and Grassmann geometry[J]. *The International Journal of Robotics Research*, 1989, 8(5):45-56.
- [9] BEN-HORIN P, SHOHAM M. Singularity analysis of a class of parallel robots based on Grassmann-Cayley algebra[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2006, 41(8):958-970.
- [10] BEN-HORIN P, SHOHAM M. Application of Grassmann-Cayley algebra to geometrical interpretation of parallel robot singularities[J]. *The International Journal of Robotics Research*, 2009, 28(1):127-141.
- [11] FICHTER E F. A Stewart platform-based manipulator: general theory and practical construction[J]. *The International Journal of Robotics Research*, 1986, 5(2):157-182.
- [12] CHOI H B, KONNO A, UCHIYAMA M. Analytic singularity analysis of a 4-DOF parallel robot based on Jacobian deficiencies[J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2010, 8(2):378-384.
- [13] GOSSELIN C, ANGELES J. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains[J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1990, 6(3):281-290.
- [14] CECCARELLI M, MAURIZIO DECIO FINO P, MANUEL JIMENEZ J. Dynamic performance of CaPaMan by numerical simulations[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2002, 37(3):241-266.
- [15] WANG R B, WU H T, LIU Y L, et al. A numerical method for forward kinematics of general Stewart manipulator using natural coordinates[J]. *Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing*, 2019, 13(1):JAMDSM0002.
- [16] LIU Y, WU H, YANG Y, et al. Symmetrical workspace of 6-UPS parallel robot using tilt and torsion angles[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2018, 2018:1-10.

收稿日期:2022-05-24

#### (上接第 27 页)

- [3] MERLET J P. *Parallel robots*[M]. New York: Springer-Verlag New York Inc, 2005.
- [4] 鲁凯. 基于神经网络的六自由度运动平台的正解方法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2005.
- [5] 文家富. 六自由度运动平台运动学位置正解研究[D]. 天津: 中国民航大学, 2011.
- [6] 武锡铜. 高精度六自由度并联平台控制系统设计[D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2018.
- [7] 彭志文, 高宏力, 文刚, 等. 三自由度并联机械手动力学分析与控制[J]. *机械设计与制造*, 2017(9):243-245, 249.
- [8] 胡启国, 骆艳丽, 王宇谦. 基于多目标遗传算法的 Stewart 平台运动学正解解算[J]. *机械传动*, 2019, 43(3):48-53.
- [9] 文刚. 六自由度并联机器人控制算法研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2017.
- [10] 韩磊, 刁燕, 张希斌, 等. 基于改进牛顿迭代法的手腕偏置型六自由度关节机器人逆解算法[J]. *机械传动*, 2017, 41(1):127-130, 150.
- [11] 白燕燕, 曹军, 张福元, 等. 基于粒子群算法优化卷积神经网络结构[J]. *内蒙古大学学报(自然科学版)*, 2019, 50(1):84-88.
- [12] 荆学东, 张英驰, 王梓腾, 等. 神经网络-牛顿改进算法求解 Stewart 平台正解[J]. *机械设计与制造*, 2019(12):251-254.
- [13] 钟有博. 六自由度并联平台的建模与仿真研究[D]. 天津: 天津工业大学, 2016.
- [14] 陈川雄, 张学明, 汪小志. 苹果采摘六自由度机械手设计——基于迭代学习和智能轨迹规划[J]. *农机化研究*, 2016, 38(7):65-69.
- [15] 杨恒, 薛开. 六自由度并联机构变搜索原点迭代正解方法[J]. *应用科技*, 2016, 43(2):54-58.
- [16] SELIG J M, LI H. A geometric Newton-Raphson method for Gough-Stewart platforms[C]//*Computational Kinematics*, 2009:183-190.
- [17] ZHANG H Q, FANG H R, JIANG B S, et al. A Newton-Raphson and BP neural network hybrid algorithm for forward kinematics of parallel manipulator[C]//*2019 WRC Symposium on Advanced Robotics and Automation (WRC SARA)*. Beijing, China: IEEE, :122-127.
- [18] 郝轶宁, 王军政, 汪首坤, 钟秋海. 基于神经网络的六自由度摇摆台位置正解[J]. *北京理工大学学报*, 2003, 23(6):736-739.
- [19] ZHANG C D, SONG S M. Forward kinematics of a class of parallel (Stewart) platforms with closed-form solutions[J]. *Journal of Robotic Systems*, 1992, 9(1):93-112.

收稿日期:2022-03-23