

DOI:10.19344/j.cnki.issn1671-5276.2024.06.043

基于人工蜂群算法的冗余机械臂逆运动学求解

王寒松, 杨自栋, 赵大旭, 姚自立, 韩润哲

(浙江农林大学 光机电工程学院, 浙江 杭州 311302)

摘要:利用 D-H 法对冗余机械臂建立运动学模型, 通过坐标系的转换得出正运动学的解; 探讨人工蜂群算法对 7DOF 机械臂运动学求解的有效性, 使用人工蜂群算法对冗余机械臂进行逆运动学求解, 构造以位置误差以及求解时间为目标函数来寻求最优解; 以最小位置误差和求解时间为目标, 让机械臂运行到指定位置并将计算结果与粒子群算法进行比较。Matlab 仿真实验表明: 人工蜂群算法所计算的位置误差稳定在 10^{-4} mm, 其搜索精度、收敛精度以及收敛速度均优于粒子群算法, 计算最优解所使用的时间也优于粒子群算法, 所表现的稳定性以及鲁棒性更适用于冗余机械臂的逆运动学求解。

关键词:逆运动学求解; 人工蜂群算法; 粒子群算法; 收敛精度

中图分类号:TP241; TP18 **文献标志码:**A **文章编号:**1671-5276(2024)06-0218-06

Inverse Kinematics Solution of Redundant Manipulator Based on Artificial Bee Colony Algorithm

WANG Hansong, YANG Zidong, ZHAO Daxu, YAO Zili, Han Runzhe

(College of Optical and Mechanical Engineering, Zhejiang A & F University, Hangzhou 311302, China)

Abstract: A kinematics model is established by D-H method, and the forward kinematics solution is obtained through the transformation of coordinate system. The validity of artificial bee colony algorithm for kinematics solution of 7DOF manipulator is discussed. The inverse kinematics of the redundant manipulator is solved by using the artificial bee colony algorithm, and the optimal solution is found by constructing the objective function of position error and solution time. The minimum position error and solution time are taken as the objectives to make the manipulator run to the specified position and compare the calculation results with the particle swarm algorithm. The Matlab simulation experiment shows that the position error calculated by the artificial bee colony algorithm is stable at 10^{-4} mm, and the search accuracy, convergence accuracy and speed of the artificial bee colony algorithm are better than particle swarm algorithm, and the stability and robustness of the algorithm are more suitable for the inverse kinematics solution of redundant manipulator.

Keywords: inverse kinematics solution; artificial bee colony algorithm; particle swarm algorithm; convergence precision

0 引言

随着科技的快速发展, 工业现代化的发展越快, 目前机械臂在各个领域中应用越多样化, 在航天领域、汽车领域以及精密制造等领域中都承担着重要的功能。7 自由度机械臂的主要功能包括实现本体避障、奇异位形回避、避限位关节、关节力矩优化以及增加操作性等^[1]。与传统的 6 自由度机械臂相比, 7 自由度机械臂的特点就是多了一个冗余自由度, 其使用结构与人类的手臂更为相近。然而, 7 自由度机械臂的关节角变量更多, 导致其逆运动学求解的过程也更加繁琐复杂。当前, 用于求解冗余机械臂逆运动学问

题的方法主要有 3 种: 封闭解法、数值解法以及智能求解法^[2]。

封闭解法的使用原理为采用空间几何知识对机械臂进行逆运动学求解, 其求解结果精确, 计算时间快。但是该方法主要适用于满足 Pieper 准则的机械臂结构, 而冗余机械臂由于关节角变量过多, 使用该方法求解过程极其困难, 计算结果误差较大。数值解法使用原理为采用雅可比矩阵法、梯度投影法等方法进行求解^[3]。雅可比矩阵法的工作原理就是通过不断地求导计算以及求逆计算来得到求解答案; 梯度投影法的工作原理就是通过梯度的投影技巧来求逆运动学解的近似值。智能求解法的使用原理为通过编码以及适应度函数

基金项目:浙江省尖兵领雁计划项目(2022C02042)

第一作者简介:王寒松(1997—), 男, 浙江台州人, 硕士研究生, 研究方向为机械设计与开发, 573415637@qq.com。

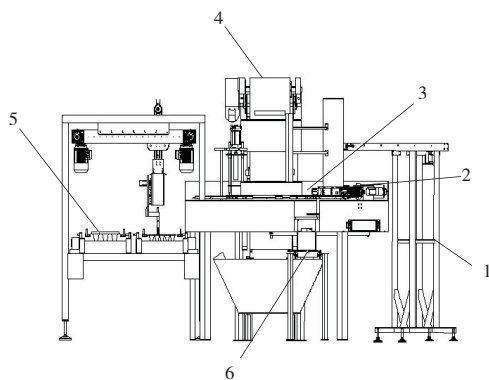
的设置将逆运动学求解过程转换成寻优过程,目前市场上对于逆运动学求解的算法主要包括神经网络、粒子群算法、遗传算法等等。文献[4]通过使用人工蜂群算法对冗余机械臂进行逆运动学求解,以位置误差以及位姿误差作为优化标准的判断。文献[5]通过将布谷鸟算法以及帝国主义竞争算法融合使用,提升了算法的搜索性能,并将其运用到机械臂的逆运动学求解过程中。相对于传统的启发式算法而言,混合算法在搜索空间最优解中具备较大优势,是目前研究的主要方向之一。

本文基于软塑料育苗营养钵的钵苗移栽机构设计,通过使用机械臂自动移栽已成型的林木苗袋钵苗到钵体之内,因此在移栽的过程中需要保证机械臂的位置精度。本文通过研究冗余机械臂的逆运动学求解方法,建立以位置误差以及姿态误差为目标的函数方程,通过使用人工蜂群算法进行逆运动学求解,并将其与粒子群算法的求解结果进行比较,展示人工蜂群算法的优秀性能,保证机械臂移栽的位置准确性。

1 机械臂的逆运动学建模

1.1 机械臂介绍

基于软塑料育苗营养钵的钵苗移栽机构结构如图1所示。



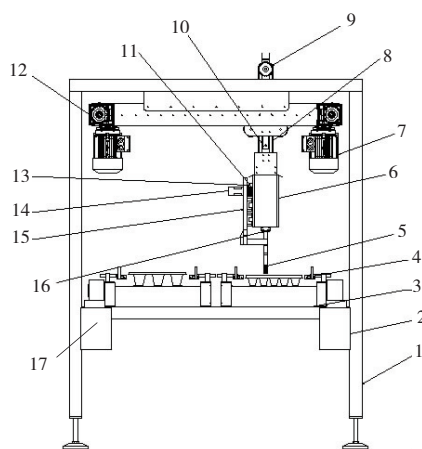
1—花盆输送带机构;2—转盘机构;3—剥离机构;
4—回收上土机;5—移栽机械臂;6—出料输送带机构。

图1 软塑料育苗营养钵的钵苗移栽机结构图

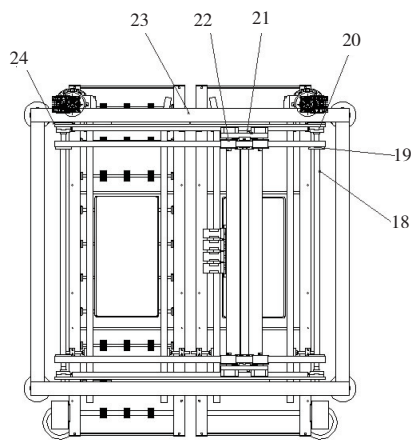
移栽机械臂主要依靠双电机驱动,通过皮带、滚轮带动 x 、 y 、 z 轴导轨进行空间移动,移栽机械臂的末端执行机构内通过气缸的控制对林木苗袋钵苗进行钵体移栽,其移栽机械臂的结构如图2所示。

本次设计的机械臂为7自由度冗余机械臂,其中自由度主要由外机架与机械臂两个部分所组

成,其中外机架的3个自由度主要为第一伺服电机2控制的流水线平台3,从而进行流水线平台 y 方向的移动,实现育苗盘的输送工作;第二伺服电机17控制外机架 z 方向的移动,实现外机架的高度调节工作;限位杆4通过调节控制外机架 x 方向的移动实现不同规格育苗盘的使用。机械臂的4个自由度控制为第三伺服电机7以及第四伺服电机12控制 y 轴导轨23以及 z 轴导轨8移动,完成 z 方向与 y 方向的移动。另外第五伺服电机14控制 x 轴导轨13的移动,完成 x 方向的移动,实现机械臂无死角抓取功能;最后由第三气缸16控制柔性机械爪5完成抓取移栽的工作。



(a) 机械臂主视图



(b) 机械臂俯视图

1—外机架;2—第一伺服电机;3—流水线平台;4—限位杆;
5—柔性机械爪;6—连接板;7—第三伺服电机;8— z 轴导轨;
9—滚轮;10—滑块;11—齿轮齿条传动机构;12—第四伺服电机;
13— x 轴导轨;14—第五伺服电机;15—滑板;16—第三气缸;
17—第二伺服电机;18—滚动轴;19—第三皮带;20—第一主动轮;
21—凹槽板;22—滚动轮;23— y 轴导轨;24—第二主动轮。

图2 移栽机械臂结构图

上述所涉及的7自由度机械臂主要实现方式是通过电机控制皮带传动机构、齿轮齿条传动机

构来完成的。因此为了保证林木苗袋苗在移栽过程中的精度,本文将通过对 7DOF 机械臂做研究,寻找移栽位置中的最优解,其运动示意图如图 3 所示。

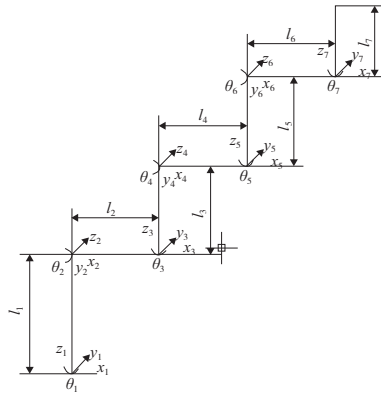


图 3 7DOF 机械臂运动示意图

通过对冗余机械臂的关节变量以及基座建立坐标系,将基座坐标系视为坐标原点,设计成 $Ox_0y_0z_0$,转动关节(1—7)的坐标中设定为 $Ox_1y_1z_1—Ox_7y_7z_7$ 。图中对机械臂的各个关节变量处都建立三维坐标系,用以描述机械臂的运动情况^[6]。本次冗余机械臂的 D-H 运动参数以及关节变量范围如表 1 所示。表中 a_i 表示连杆长度; α_i 表示连杆扭角; d_i 表示连杆偏距; θ_i 表示关节角活动范围,也是设计的搜索范围。

表 1 7DOF 机械臂运动参数

编号	a_i/mm	α_i/rad	d_i/mm	θ_i/rad
1	0	-90	500	(-180,180)
2	200	90	0	(-90,30)
3	250	-90	0	(-90,120)
4	300	90	0	(-90,90)
5	200	-90	0	(-90,90)
6	200	0	0	(-90,90)
7	100	0	50	(-30,900)

1.2 逆运动学问题与建模

对于冗余机械臂的逆运动学求解原理就是对机械臂的末端执行器设定位姿 $(x_{\text{ex}}, y_{\text{ex}}, z_{\text{ex}}, \alpha_{\text{ex}}, \beta_{\text{ex}}, \gamma_{\text{ex}})$, 求解出该位姿下其所对应的关节空间点 $\{\theta_i\}, i=1, 2, \dots, 7$ 最优解。其中 $(x_{\text{ex}}, y_{\text{ex}}, z_{\text{ex}})$ 指的是末端执行器的质点在极坐标的位置, $(\alpha_{\text{ex}}, \beta_{\text{ex}}, \gamma_{\text{ex}})$ 指的是末端执行器在极坐标系的欧拉角^[7]。

对于机械臂的逆运动学求解使用传统的启发

式算法为常见方法,启发式算法的使用原理就是通过算法建立正运动学方程对机械臂的执行末端进行求解运算,以最小位置误差以及姿态误差为目标来寻求最优解。

基于欧拉角法建立坐标轴之间的转换矩阵,依次对建立的 3 个坐标轴进行旋转,每个坐标轴在旋转时与前后坐标轴呈现正交状态,在通过平移达到坐标系重合^[8]。在平移旋转的过程中,假设机械臂当下的关节角为 $\{\theta_i\}, i=1, 2, \dots, 7$, 则坐标系 i 到坐标系 $i-1$ 的转换矩阵为

$$T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \cos\alpha_i & \sin\theta_i \sin\alpha_i & a_i \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \sin\alpha_i & a_i \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中 T_i^{i-1} 为从坐标系 i 到坐标系 $i-1$ 的转换矩阵。

冗余机械臂的末端执行器到基座坐标系的齐次转换矩阵方程为

$$T_7^0 = \prod_{i=1}^7 T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中 (p_x, p_y, p_z) 为机械臂末端执行器质心在基座坐标系的实际位置。

根据式(2)所计算的质心实际坐标位置,可以求得机械臂末端执行器的实际姿态位置为

$$\begin{cases} \beta_{\text{re}} = \text{atan2}(\sqrt{n_x^2 + o_x^2}, a_z) \\ \alpha_{\text{re}} = \text{atan2}\left(\frac{a_y}{\sin\beta_{\text{re}}}, \frac{a_x}{\sin\beta_{\text{re}}}\right) \\ \gamma_{\text{re}} = \text{atan2}\left(\frac{o_y}{\sin\beta_{\text{re}}}, \frac{-n_z}{\sin\beta_{\text{re}}}\right) \end{cases} \quad (3)$$

式中 $(\alpha_{\text{re}}, \beta_{\text{re}}, \gamma_{\text{re}})$ 为机械臂末端执行器基座坐标系的实际欧拉角。

根据上面设定的末端机械臂位姿以及关节空间点所求的末端执行器实际位姿,则计算所得的位置误差以及姿态误差为

$$\begin{cases} \Delta P = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \\ \Delta R = \sqrt{\Delta \alpha^2 + \Delta \beta^2 + \Delta \gamma^2} \end{cases} \quad (4)$$

式中 ΔP 为机械臂的位置误差; ΔR 为机械臂的姿态误差。

位置误差变化主要和连杆长度以及连杆偏距有关,而姿态误差变化主要和连杆长度有关。由

于计算式两者不属于同一量纲,所以求解时为了保证两种误差尽可能获得最小值,引入了误差系数 w_p, w_r , 即

$$f_{\text{obj}} = w_p \cdot \Delta P + w_r \cdot \Delta R \quad (5)$$

式中: w_p 为位置误差系数,取值为 $w_p = 1$; w_r 为姿态误差系数,取值 $w_r = 180/\pi$,随机械臂的变化而自行调整。

本次讨论的机械臂由于采用的主要控制方式为伺服电机的控制,通过齿轮齿条传动机构以及皮带机构完成传动,其中工作时所受到的惯性以及摩擦力不会影响其控制效果,因此不予考虑。

2 使用算法描述

2.1 人工蜂群 ABC 算法

在人工蜂群算法之中,可以将蜜蜂主要分成3类:引领蜂、跟随蜂以及侦察蜂。人工蜂群算法的过程包括蜜蜂的初始化、引领蜂进行搜索阶段,跟随蜂进行搜索阶段,最后是侦察蜂进行搜索阶段等。

在初始化阶段中,蜜蜂按照随机方式进行位置的初始化:

$$X_{ij} = X_j^{\min} + \text{rand}(0,1) (X_j^{\max} - X_j^{\min}) \quad (6)$$

式中: $i \in [1, N]$ 为蜜蜂的编号; N 为蜜蜂的总数量; $j \in [1, J]$ 为位置维度; J 为位置维度; $X_j^{\max}, X_j^{\min}$ 为位置维度 J 的最大值以及最小值; X_{ij} 为蜜蜂的随机初始化位置。

在引领蜂进行搜索阶段搜索食物源时,发现新的搜索途径可以减少搜索时间,则会使用新的搜索方法。适应度靠前的蜜蜂转换成引领蜂,后面的蜜蜂转换成跟随蜂继续进行搜索^[9]。其中前面的引领蜂位置则发生改变为

$$X'_{ij} = \begin{cases} X_j^{\max}, & X_{ij} + (X_{ij} - X_{kj}) \cdot \text{rand}(0,1) > X_j^{\max} \\ X_j^{\min}, & X_{ij} + (X_{ij} - X_{kj}) \cdot \text{rand}(0,1) < X_j^{\min} \\ X_{ij} + (X_{ij} - X_{kj}) \cdot \text{rand}(0,1), & \text{else} \end{cases} \quad (7)$$

式中: X_j 为原蜜源位置; X'_{ij} 为引领蜂搜索到的新蜜源位置。

引领蜂搜寻到新的蜜源位置进行位置的改变后,会通过信号传递给后面的跟随蜂,跟随蜂会选择是否跟随前面的引领蜂前进,其跟随概率为

$$p_i = \frac{f_{it,i}}{\sum_{j=1}^{N_B} f_{it,j}} \quad (8)$$

式中: p_i 为跟随蜂选择跟随引领蜂前进的概率; $f_{it,i} = 1/f_{\text{obj}}^i$ 为引领蜂位置适应度数值; f_{obj}^i 为引领蜂

发现蜜源的目标函数。

在跟随蜂选择跟随引领蜂后,蜜蜂就开始一起向蜜源处进行搜索采蜜。在引领蜂与跟随蜂在蜜源位置进行采蜜搜索,采蜜次数超过了设定值,且蜜源适应度没有显著提高,蜜蜂将放弃对该区域的搜索探查,将换成侦察蜂重新进行新蜜源的大范围搜索:

$$X_{ij} = X_j^{\min} + (X_j^{\max} - X_j^{\min}) \cdot \text{rand}(0,1) \quad (9)$$

所以人工蜂群算法的优势就是可以采用交叉操作在全局寻求最优解,提高了计算的精度。

2.2 粒子群 PSO 算法

粒子群算法主要是模仿鸟群捕食所设计的。通过观察鸟群在捕食的时候发现某一块区域出现食物,鸟群通过离食物最近的鸟发出信号过去捕食。所以在粒子群算法中,可以将鸟视为粒子。粒子有各自被优化函数所决定的适应值,在空间内搜索最优函数解。粒子在搜索的过程中主要考虑的参数为速度以及位置变化。因为粒子位置的改变取决于其速度的大小:

$$V_{id}(t+1) = V_{id}(t) + c_1 \cdot r_1 \cdot (P_{\text{best}} - X_{id}(t)) + c_2 \cdot r_2 \cdot (g_{\text{best}} - X_{id}(t)) \quad (10)$$

式中: $V_{id}(t)$ 为粒子经过迭代计算后的速度; P_{best} 为粒子经过迭代计算在空间搜索范围的最优位置; g_{best} 为种群经过的迭代计算在空间搜索范围上最优位置; c_1 为粒子的学习因子; c_2 为种群的学习因子; r_1 为粒子的随机系数,取值(0,1); r_2 为种群的随机系数,取值(0,1)。

$$X_{id}(t+1) = V_{id}(t) + X_{id}(t) \quad (11)$$

式中 $X_{id}(t)$ 为粒子经过迭代计算后的位置。

2.3 算法流程描述

为了保证机械臂末端执行器在使用的时候可以准确到达所设定的空间位置坐标,其根本为准确计算各个关节角的最优值。因此,本文将使用人工蜂群算法来计算出各个关节角的最优解,将计算所得最优解呈现的机械臂末端执行器的空间位置与设定的空间位置相比较,比较机械臂的位置误差如下:

$$\Delta E = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (12)$$

式中: ΔE 为实际与设定之间的位置误差; x_1, y_1, z_1 为人工蜂群算法所计算的机械臂执行器末端位置; x_2, y_2, z_2 为设定的机械臂执行器末端位置。

3 仿真与分析

本文通过研究人工蜂群算法对 7DOF 机械

臂进行逆运动学求解。在使用的时候可以通过手动调节改变机械臂的位置。手动调节后的机械臂位置所呈现的关节角度 $\theta_1 \sim \theta_7$ 依次为: $45^\circ, 0^\circ, 45^\circ, 0^\circ, 45^\circ, 0^\circ, 0^\circ$ 。通过算法所得到的位置会和手动调节的有些许区别,本文将使用人工蜂群算法以最小位置误差以及姿态误差为目标让机械臂运行到指定位置,将计算结果与粒子群算法进行比较,其中计算的最优解为 $(101.19, -9.52, -14.32, 4.36, 39.68, 35.94, 72.68)$,结果如表 2 所示,关节角变化迭代曲线如图 4 所示。

表 2 不同算法所得的关节最优解

关节角度	角度值/(°)	粒子群算法	人工蜂群算法
θ_1	45	48 282	101.19
θ_2	0	-6 758	-9.52
θ_3	45	47 497	-14.32
θ_4	0	34 208	4.36
θ_5	45	50 654	39.68
θ_6	0	-60 107	35.94
θ_7	0	-30	72.68

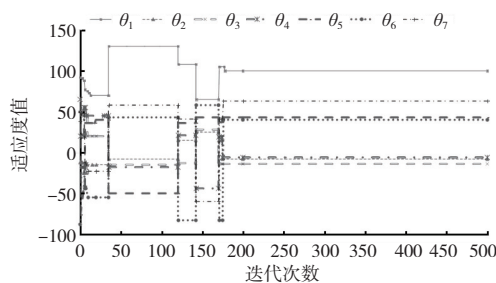


图 4 关节角变化迭代曲线

本次仿真实验是在 Matlab 中编程来进行逆运动学的求解,主要研究的对象为 7 自由度冗余机械臂。其中设置的人工蜂种群数为 100,粒子群算法种群数为 300,最大迭代次数为 500。使用人工蜂群算法对机械臂逆运动学进行求解,运行该算法 50 次,其中设定的定位精度要求为:位置误差不大于 0.1 mm,姿态误差不大于 10^{-3} mm。当搜索精度达到该要求的时候,对应的关节角序列才满足使用要求。其中随着迭代次数的变化位置误差的变化过程如图 5 所示。

从图 5 可以发现,人工蜂群算法经过多次迭代次数后,位置误差会进行快速下降,最后趋于稳定的数据,位置误差稳定在 4.883×10^{-3} mm。分别使用人工蜂群算法以及粒子群算法独立运行 50

次,讨论两种算法之中位置误差差距以及迭代 500 次所使用的计算时间均如图 6 所示。

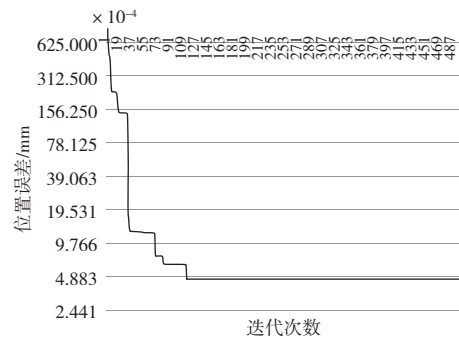
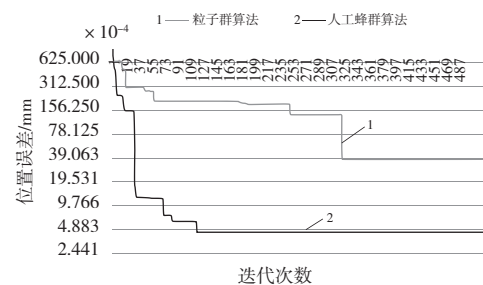
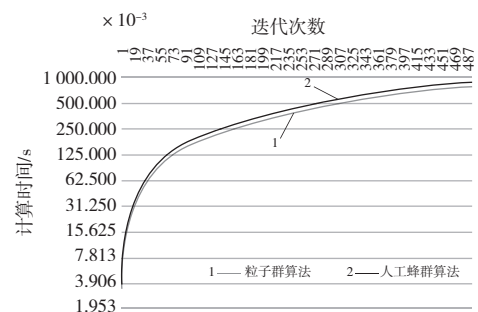


图 5 人工蜂群算法位置误差迭代曲线



(a) 不同算法位置误差迭代曲线



(b) 迭代 500 次的计算时间曲线

图 6 不同算法优化迭代曲线

通过图 6(a) 可以发现,人工蜂群算法在进行逆运动学求解中,随着迭代次数的增加,收敛速度、位置误差精度均优于粒子群算法。在迭代次数将近 500 次时,使用人工蜂群算法所对应的位置误差稳定在 10^{-4} 以下,而粒子群算法所对应的位置误差稳定在 10^{-3} 以下。通过图 6(b) 可以发现人工蜂群算法与粒子群算法经过 500 次迭代次数所使用的计算时间较为接近,人工蜂群算法所使用计算时间略微少于粒子群算法。综上所述可以得知,人工蜂群算法的搜索精度是优于粒子群算法的,收敛精度以及收敛速度是快于粒子群算法的。

将上述人工蜂群算法以及粒子群算法所计算结果进行比较,如表 3 所示。

表3 不同算法所计算综合结果

项目	粒子群算法	人工蜂群算法
种群数	300	100
最高迭代次数	500	500
求最优解迭代次数	311	115
位置误差/mm	3.71×10^{-3}	4.75×10^{-3}
求解时间/s	0.476 8	0.208 7
计算时间/s	0.761 2	0.888 4

通过表3可以得知,粒子群算法所设置的种群数更多,有300个种群数,而人工蜂群算法的种群数才100个,种群数越多则搜多范围更大,更有利于计算出最优解。但是通过求最优解的迭代次数可以得知,人工蜂群算法所使用的迭代次数更少,计算所得出的位置误差也更小。另外对于两种算法计算500次迭代的时间是相差不大的,但人工蜂群算法所使用的求最优解时间是少于粒子群算法的。

为了验证两种算法的实验精确性,将在机械臂的工作空间随机选择100个位姿点进行逆运动学求解,其结果如图7所示。

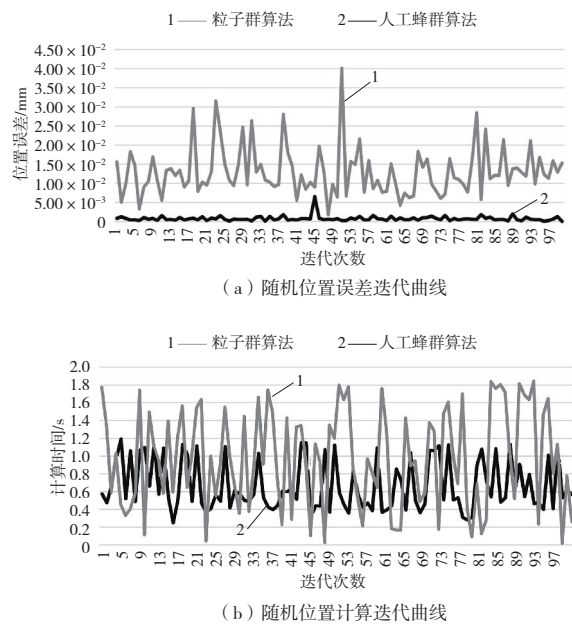


图7 随机点位的迭代计算曲线

通过图7(a)可以发现,对于冗余机械臂工作空间内随机选取100个位姿点,人工蜂群算法收敛精度更好,粒子群算法收敛性比较不稳定,在两种算法中人工蜂群算法的位置误差精度更高;图7(b)对于在不同点位计算最优解的过程,人工蜂群算法所使用的时间普遍比粒子群算法使用的时间少,收敛性更佳。

4 结语

本文通过研究冗余机械臂的逆运动学求解问题,以探索最小的位置误差以及姿态误差为目标计算模型,提出使用人工蜂群算法的求解方法。通过仿真模拟分析后,可以得出以下结论:1)对于设定好的位姿点计算,采用人工蜂群算法计算所得的位置误差、求解时间均优于粒子群算法,更切合实际应用;2)人工蜂群算法在求解过程中的收敛速度、收敛精度比粒子群算法优秀,求解的质量更高;3)在随机多个位姿的逆运动学求解中,人工蜂群算法的位置误差以及求解时间更加优秀,所展示的稳定性以及鲁棒性优于粒子群算法。因此,通过仿真实验证明,人工蜂群算法相对于粒子群算法更适用于移栽机械臂的使用,整体的位移精度更佳,后续会将本次编写的人工蜂群算法添加至机械臂的控制器中,以便于更好地完成钵苗移栽工作。

参考文献:

- [1] 徐文福,张金涛,闫磊,等. 偏置式冗余空间机械臂逆运动学求解的参数化方法[J]. 宇航学报,2015,36(1):33-39.
- [2] 党磊,熊瑞平,唐静莹,等. 同伦算法在6R机器人运动学逆解上的应用[J]. 机械,2017,44(4):5-9.
- [3] 程浩田. 基于正逆运动学分析的机械臂时间最优轨迹规划研究[D]. 太原:中北大学,2021.
- [4] 李娜托. 基于改进人工蜂群算法的冗余机器人逆解研究[J]. 组合机床与自动化加工技术,2020(3):37-40.
- [5] BAYATI M. Using cuckoo optimization algorithm and imperialist competitive algorithm to solve inverse kinematics problem for numerical control of robotic manipulators[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering,2015,229(5):375-387.
- [6] 李宪华,孙青,张雷刚,等. 双臂6R服务机器人的运动学研究及仿真[J]. 机械传动,2018,42(5):129-134.
- [7] 王腾,张承瑞,陈齐志,等. 利用增广雅克比矩阵的冗余机械臂逆运动学求解算法[J]. 科学技术与工程,2021,21(16):6752-6757.
- [8] 马丛俊,赵涛,向国菲,等. 基于逆运动学的柔性机械臂末端定位控制[J]. 机械工程学报,2021,57(13):163-171.
- [9] 魏延辉,韩寒,于园园,等. 构形平面方法求解冗余机械臂逆运动学[J]. 哈尔滨工程大学学报,2016,37(8):1096-1102.

收稿日期:2023-03-14