

DOI: 10.19344/j.cnki.issn1671-5276.2025.02.037

## 基于线性模态叠加的 T 型接头谐响应分析

杜梓涛, 周韶泽

(大连交通大学 机车车辆工程学院, 辽宁 大连 116028)

**摘要:** 针对线性模态叠加原理, 对 T 型接头进行谐响应分析, 通过线性叠加进行理论数值计算并与谐响应分析数值进行对比。对 T 型接头建立有限元模型, 介绍结构的各个属性以及运用模态分析展示出 T 型接头在前 4 阶的固有频率以及振型云图; 对 T 型接头进行模态叠加法的谐响应分析, 从而防止共振的发生; 进行理论线性模态叠加的计算, 将理论与实际值进行对比, 从而使模态叠加更加清晰明确。

**关键词:** 模态分析; 谐波响应; 模态系数; 固有频率

**中图分类号:** TP391.9    **文献标志码:** B    **文章编号:** 1671-5276(2025)02-0192-04

## Harmonic Response Analysis of T-joint Based on Linear Mode Superposition

DU Zitao, ZHOU Shaoze

(College of Locomotive and Rolling Stock Engineering, Dalian Jiaotong University, Dalian 116028, China)

**Abstract:** According to the principle of linear modal superposition, the harmonic response of T-joint is analyzed, and the theoretical numerical calculation is compared with the harmonic response analysis by linear superposition. The finite element model of T-joint is established to introduce the various attributes of the structure, and the natural frequency and vibration pattern of T-joint in the first four order are shown by modal analysis. The harmonic response of T-joint is analyzed by modal superposition method, so as to prevent the occurrence of resonance. The theoretical linear modal superposition is calculated, and the theoretical value is compared with the actual value. Thus, the modal superposition is better clarified and explicated.

**Keywords:** modal analysis; harmonic response; modal coefficient; natural frequency

## 0 引言

T 型接头在机车车辆中被广泛使用, 但在机车运行过程中往往由于焊接疲劳的问题, 导致机车无法正常行驶。通过对结构进行谐响应分析, 能够准确地找出问题的关键, 同时能够解决结构与机车振动频率一致的问题, 从而达到优化、稳固。王冰<sup>[1]</sup>通过对构件的动力学分析, 对结构的固有频率做出了分析, 避免了构件与转动轴发生共振。顾亮等<sup>[2]</sup>提出了以振型平方和的形式对频响函数进行加权组合。邹孔庆等<sup>[3]</sup>推导了大跨度桥梁模态贡献度系数和最优时间步长计算公式。吴梦玉<sup>[4]</sup>提出了加权位移模态高斯曲率识别。庞超凡等<sup>[5]</sup>通过对结构的研究, 在将质量减小的情况下, 提高了结构的可靠性。孙攀旭等<sup>[6]</sup>实现了基于 Rayleigh 阻尼模型的复模态叠加法。现有文献对模态叠加研究很多, 多数研究是直接针对结构的振动特性展开研究, 在研究过程中常常忽略线性理论过程, 其研究耗时长且内容不易理解。因此, 结合现有的研究成果, 本文以 T 型接头为研

究对象, 提出基于线性模态叠加的方法, 在对结构进行模态分析及谐响应分析的基础上, 验证该方法能够检测出动力学系统的线性, 使识别结构的线性模态参数能足够准确, 更有利于理解与分析。

## 1 模态叠加相关理论

模态分析是动力学中最基本的部分。通过模态分析, 可以使结构避免共振或让结构在指定的频率下振动, 且在结构设计过程中应避免共振的发生。

结构动力学中通用的动力学控制方程如下所示。

$$M\ddot{\mathbf{u}} + C\dot{\mathbf{u}} + K\mathbf{u} = \mathbf{F}(t) \quad (1)$$

式中:  $M$  为结构质量矩阵;  $C$  为结构阻尼矩阵;  $K$  为结构刚度矩阵;  $\mathbf{F}(t)$  为力矩阵;  $\mathbf{u}$  为节点位移矢量;  $\dot{\mathbf{u}}$  为节点速度矢量;  $\ddot{\mathbf{u}}$  为节点加速度矢量<sup>[7]</sup>。

式(1)的物理意义可以理解为

$$m \cdot a + c \cdot v + k \cdot x = f(t) \quad (2)$$

式中:  $a$  为加速度;  $v$  为速度;  $x$  为位移。

求解式(1), 要设  $\mathbf{F}(t) = 0$ , 将它转换为齐次

第一作者简介: 杜梓涛(2000—), 男, 河北石家庄人, 硕士研究生, 研究方向为结构动力学以及焊接疲劳, 1171951875@qq.com。

的2阶微分方程,可以求解出特征值和特征向量<sup>[8]</sup>。所求特征值即为各阶的固有频率,对应的特征向量即为各阶振型,即式(1)可以变成:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = 0 \quad (3)$$

在实际结构当中,结构的材料本身所带有的阻尼比是很小的,有阻尼和无阻尼得到的固有频率基本上没有差异,故设  $C=0$ ,则可以得到:

$$M\ddot{u} + Ku = 0 \quad (4)$$

需要特别注意的是,模态分析假定结构是线性的,因此  $M$ 、 $K$  是保持为常数的,这也是可以继续算下去的基础。对上述式子进一步分析,假设此时的自由振动为简谐运动,也就是说  $u = u_0 \sin \omega t$  ( $\omega$  为圆周频率,  $u_0$  为常系数),且  $\ddot{u} = -\omega^2 u_0 \sin \omega t$ ,将位移和加速度带入式(4)可以得到:

$$K - \omega^2 Mu = 0 \quad (5)$$

对式(5)进行求解,可以得到方程的根  $\omega^2$ ,即方程的特征值,特征值开平方则为  $\omega$ ,即固有圆周频率,因此结构的固有频率就可以通过公式  $f = \omega / (2\pi)$  计算。对式(5)进行转化可以得到  $\omega^2 = K/Mu$ ,这可以看出固有频率与刚度和结构质量之间的关系,与刚度成正比,与结构的质量成反比。

模态叠加法就是在式(1)的基础上进行降阶,通过上述公式首先分析模态板块的问题:

$$M\phi = \omega^2 K\phi \quad (6)$$

从式(6)中得到  $j$  阶最小特征值对  $(\omega_1, \phi_1)$ ,  $(\omega_2, \phi_2)$ ,  $\dots$ ,  $(\omega_j, \phi_j)$  ( $\phi$  为结构的振型),通过  $j$  阶振型组成的  $i \times j$  阶振型矩阵对其引入一组新的坐标  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)^T$  进行坐标变换:

$$u = \phi\theta = \sum_{n=1}^j \phi_n \theta_n \quad (7)$$

在式(1)左右两端的左边乘  $\phi^T$ ,可以得出:

$$\phi^T M \phi \ddot{u} + \phi^T C \phi \dot{u} + \phi^T K \phi u = \phi^T F(t) \quad (8)$$

通过模态振型关于质量和刚度矩阵的正交性,采用模态比例阻尼,可得:

$$\begin{cases} \phi^T M \phi = I_j \\ \phi^T K \phi = \text{diag} \{ \omega_1^2, \dots, \omega_j^2 \} \\ \phi^T C \phi = \text{diag} \{ 2 \omega_1 \xi_1, 2 \omega_2 \xi_2, \dots, 2 \omega_j \xi_j \} \end{cases} \quad (9)$$

式中  $\xi_j$  代表第  $j$  阶模态阻尼比。

将式(9)带入式(8),可以得到  $j$  个互相独立的方程,其中第  $j$  个方程为

$$\ddot{u}_j + 2 \omega_j \xi_j \dot{u}_j + \omega_j^2 u_j = b_j \quad (10)$$

通过式(10)就可以将多自由度系统方程解耦,通过求解每一个单自由度系统对应的  $u_j$ ,利用

式(7)进行求解可得到原来多自由度系统的解。

## 2 有限元模型建立

使用 SolidWorks 创建三维 T 型接头模型,将模型转化为 STP 格式导入 Workbench 中进行分析,T 型接头在机车车辆中运用非常多,常常因为疲劳问题而失效<sup>[9]</sup>。Ansys Workbench 有限元通过节点进行计算,在软件中可以进行自动化的网格划分,模型精度要求较高的地方会自动调节网格的密度,使模型网格质量达到要求,如图 1 所示。

模拟 T 型焊接接头,材料为结构钢,泊松比为 0.3,弹性模量为 20 000 MPa,结构的节点数量为 777,单元数量为 740。仿真模拟 T 型接头固定一端,在整体结构上施加  $y$  方向单位加速度。

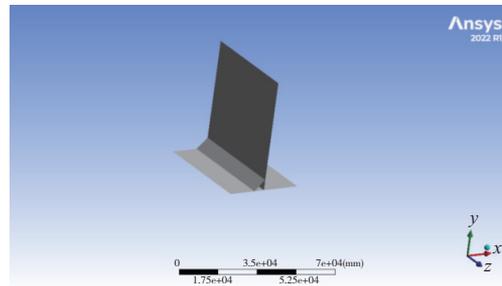


图 1 T 型接头有限元模型

## 3 T 型接头模态以及谐响应分析

### 3.1 模态分析

模态分析中只关心低阶频率,低阶模态参与系数大;而高阶模态参与系数小,对结果影响不大,故高阶模态可以忽略。

表 1 所示为结构前 4 阶固有频率,图 2 为结构的振型云图。通过表 1 和图 2 可以看出 T 型接头的第 1 阶模态固有频率为 1.567 7 Hz,最大总变形量为 0.006 296 mm;第 2 阶模态固有频率为 3.732 0 Hz,最大总变形量为 0.008 751 mm;第 3 阶模态固有频率为 4.393 3 Hz,最大总变形量为 0.005 858 mm;第 4 阶模态固有频率为 8.281 8 Hz,最大总变形量为 0.004 611 mm。

表 1 结构前 4 阶模态固有频率

阶数	固有频率/Hz
1 阶	1.567 7
2 阶	3.732 0
3 阶	4.393 3
4 阶	8.281 8

由图 2 可以看出,T 型接头结构都出现一定程度上的变形。在实际运用过程中,模态分析得到的固有频率在一定程度上可以起到参考的作用,但是真正考察共振的问题,需要对结构进行谐

波响应分析,从中得出结构在何种频率下会发生共振。共振是有害的,当载荷与结构的频率一致时,会导致结构发生大幅度的形变,最终导致结构发生破坏。因此需要对结构进行谐波响应分析。

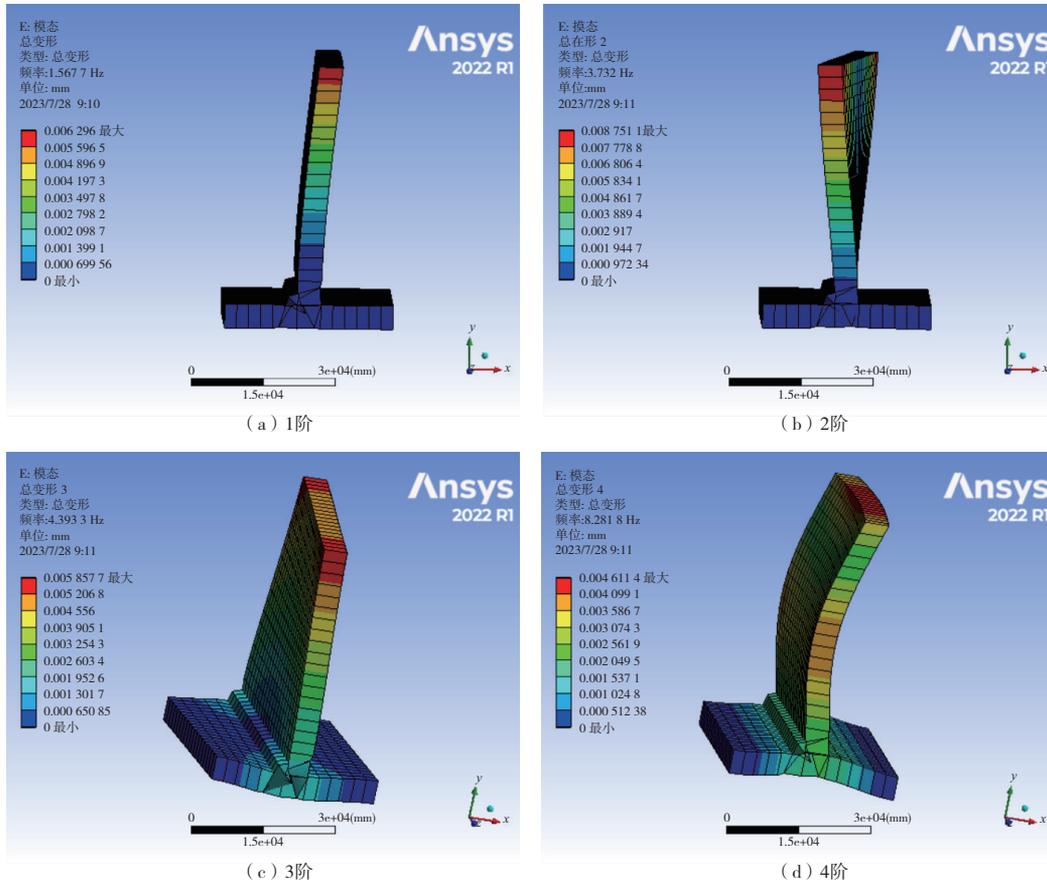


图 2 第 1—4 阶模态振型

### 3.2 谐响应分析

在 Ansys Workbench 中谐响应分析是基于模态分析基础上的,模态叠加法又可以叫做振型叠加法,在软件中可直接设置工况,然后对其进行求解,其原理就是利用坐标变换将原来的动力学运动方程进行解耦,形成  $n$  个独立的方程求解振型位移解,最后进行各阶的模态叠加得出总响应曲线。具体原理计算参考上述模态理论。

本文对结构进行谐响应分析,通过模态分析可以得出前 4 阶模态的频率不超过 9 Hz。为了计算更加精确,对结构的频率间距(需要注意的是频率间距应小于模态分析频率的 1.5 倍)范围设置最小为 1 Hz,最大为 9 Hz,求解方案间隔设置为 200,阻尼设置为 0.02。对结构分别在  $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向进行谐响应曲线的求解如图 3 所示。从图中可以看出,结构发生两次共振,分别是 1.56 Hz、8.24 Hz,故在设计优化过程中,需要对这两阶频

率进行蔽频。

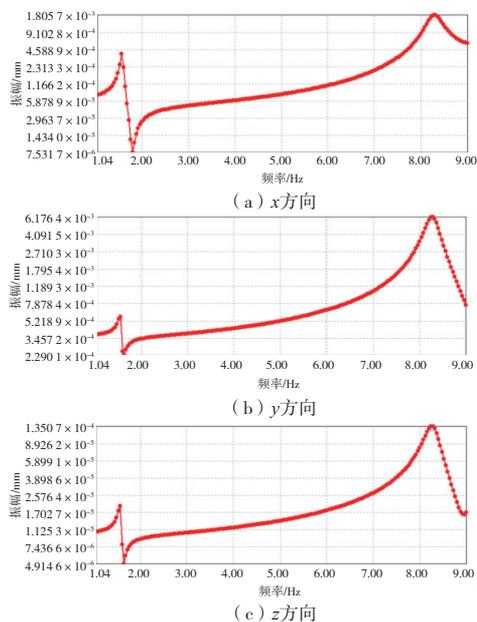


图 3  $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向谐响应曲线

### 4 模态叠加理论响应与实际响应对比

模态可以被叠加,每个模态的振幅和相位都可以被叠加在一起,最终形成系统的总体响应。在模态分析中,结构被建立成许多离散的单元,分析每个单元的振动特性,利用这些特性,将模态响应计算出来,并且叠加求出最后响应。式(11)是某方向模态振型叠加的计算公式,某阶振型乘上某阶的模态系数,最终求和得出某方向响应。

$$Z = \sum_{i=1}^n a_i \times z_i \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

式中: $a_i$ 为第*i*阶振型的模态系数; $z_i$ 为第*i*阶位移振型值。

*x*、*y*、*z*方向模态系数如表2所示,*x*、*y*、*z*方向对比如图4所示。

表2 *x*、*y*、*z*方向模态系数

方向	模态系数			
	1阶	2阶	3阶	4阶
<i>x</i>	1.883 00	0.234 00	0.090 00	0.237 00
<i>y</i>	6.068 00	0.041 00	0.024 40	0.010 50
<i>z</i>	4.478 00	0.016 50	0.002 23	-0.108 00

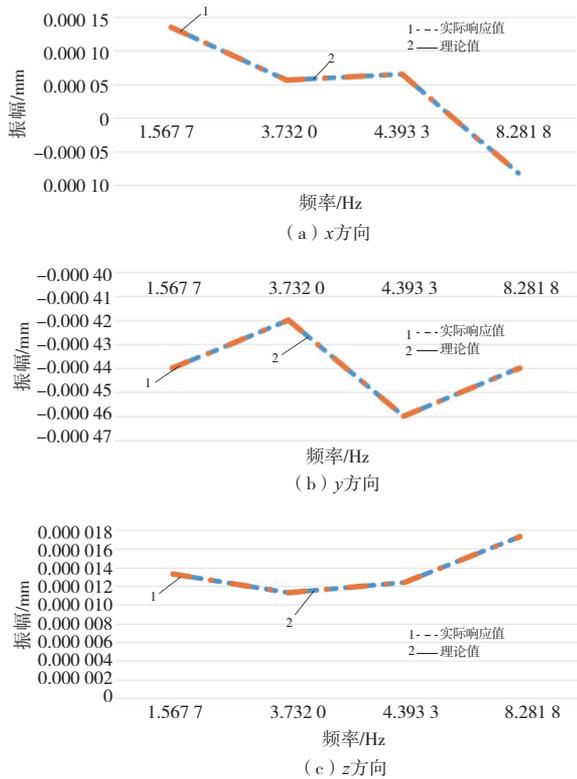


图4 *x*、*y*、*z*方向对比

从上文可以看出线性模态叠加理论值与实际响应值一致,验证了线性模态叠加与谐响应值的一致性、准确性。

### 5 结语

本文提出了一种基于线性模态叠加理论响应与实际响应对比的方法,比较两种方法响应值大小,得出数值上保持一致,使理论与实际融合。通过计算数值以及理论公式,进一步提高了对模态叠加法的理解。并且,通过模态分析以及谐响应分析对T型接头进行变形情况分析,得到结构在固有频率下最薄弱的频率,为后续优化结构奠定基础。

### 参考文献:

- [1] 王冰. 齿轮传动系统传动轴模态仿真及振动实验测试研究[J]. 机械制造与自动化, 2021, 50(3): 110-112.
- [2] 顾亮,潘旭峰,胡琪琪. 平方振型加权模态参数整体识别法[J]. 北京科技大学学报, 1994, 16(6): 561-566.
- [3] 邹孔庆,黄文锋,王美芹,等. 基于模态贡献度系数的大跨度桥梁抖振响应分析[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2016, 39(1): 122-127.
- [4] 吴梦玉. 基于位移模态相关系数的板类结构附着质量损伤识别研究[D]. 天津:天津理工大学, 2022.
- [5] 庞超凡,闫世风,邹彩虹,等. 基于模态叠加法的悬臂吊悬臂结构优化[J]. 机械设计, 2021, 38(11): 51-56.
- [6] 孙攀旭,杨红,刘庆林. 基于动力特性的混合结构地震响应复模态叠加法[J]. 工程力学, 2020, 37(11): 69-82.
- [7] LI Z M, SONG Q H, LIU Z Q, et al. Response prediction of cantilever plates via mode superposition method and combination method of beam functions[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2023, 200: 110613.
- [8] ANDRADE P, SANTOS J, ESCÓRCIO P. Direct integration methods versus modal superposition method, on predicting staircases vibrations [J]. Procedia Structural Integrity, 2020, 28: 279-286.
- [9] 郑轩,苟黎刚,廖慧红,等. 基于模态叠加法的后背门焊点疲劳预测[J]. 机械研究与应用, 2021, 34(3): 138-140.

收稿日期:2023-08-16