

DOI: 10.19344/j.cnki.issn1671-5276.2025.02.018

含裂纹压电悬臂梁动力学频态研究

王晓军¹, 张红兵¹, 李万祥¹, 王志华²

(1. 兰州交通大学 机电工程学院, 甘肃 兰州 730070; 2. 国网甘肃省电力公司 酒泉供电公司, 甘肃 酒泉 735099)

摘要: 基于压电悬臂梁具有独特的振动压电效应, 建立一种含裂纹压电悬臂梁受外部激励作用的系统动力学模型。利用变步长 4 阶 Runge - Kutta 法对系统参数进行仿真, 借助分岔图、相轨迹图、Poincaré 映射图对含裂纹压电悬臂梁非线性振动转迁频态进行分析, 并且基于多尺度法分析了系统的固有频率、阻尼特性对其主振振幅的影响。研究表明: 含裂纹压电悬臂梁系统的分岔形式以及运动状态具有复杂的非线性多样性。

关键词: 压电悬臂梁; 非线性; 分岔; 混沌**中图分类号:** TP391.9 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5276(2025)02-0094-04

Study on Dynamic Frequency State of Piezoelectric Cantilever Beam with Cracks

WANG Xiaojun¹, ZHANG Hongbing¹, LI Wanxiang¹, WANG Zhihua²

(1. School of Mechanical and Electrical Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China;

2. Jiuquan Power Supply Company, State Grid Gansu Electric Power Company, Jiuquan 735099, China)

Abstract: A dynamic model of piezoelectric cantilever beam with cracks under external excitation is established based on the unique vibrating piezoelectric effect of piezoelectric cantilever beam. The four-order Runge-Kutta method with variable step size is used to simulate the system parameters, and by means of bifurcation diagram, phase trajectory diagram and Poincaré mapping diagram, the nonlinear vibration transition frequency state of cracked piezoelectric cantilever beam is analyzed, and the effects of natural frequency and damping characteristics of the system on the amplitude frequency of its main vibration are analyzed based on multi-scale method. The results show that the bifurcation forms and motion states of the cracked piezoelectric cantilever beam system have complex nonlinear diversity.

Keywords: piezoelectric cantilever beam; nonlinearity; bifurcation; chaos

0 引言

在国内外含裂纹振动件研究中, 许多受力模型中惯性和阻尼力的应力添加较少, 这意味着应力与激励频率无关。但在许多实际振动件中, 振动件受载荷的主要来源并不总是直接作用于存在疲劳裂纹的振动件上。动态载荷通过惯性力或振荡从结构部件传递到相邻部件。一个引人注目的例子是裂纹梁, 它是承载受力的关键部件。当裂纹梁不断承受应力载荷时, 其受载过程中因振动易产生梁体裂纹, 说明梁体振动和疲劳裂纹发生两者密切相关^[1]。

刘淑彦^[2] 对一个压电材料复合悬臂梁采用一端夹紧、一端自由的力学边界条件, 采用基座激励的方式进行激励, 对悬臂梁进行了有限元振动模态实验。宋向荣等^[3] 提出一种理论方法开展含呼吸式斜裂纹梁的模态和非线性振动分析, 采用精细库塔法, 研究裂纹倾角和裂纹尺寸对含呼吸式

斜裂纹梁非线性振动响应的影响。NASIM^[4] 对裂纹梁和一个双线性弹簧-质量振子进行比较分析, 提出了使用方波函数模拟呼吸裂纹梁刚度变化的方法, 分析了系统的谱特性和谐波成分。杨骁等^[5] 忽略裂纹对梁剪切变形的影响, 建立一种等效扭转弹簧模型, 并推导出 Timoshenko 裂纹梁数学方程, 得到了一种新的裂纹梁动力弯曲控制方程的求解方法。何奥迪等^[6] 应用 Runge - Kutta 法, 对间隙支承转子进行非线性动力学建模, 分析了碰撞间隙对系统响应特性的影响。马立^[7] 设计了一系列 L 型梁优化模型, 进一步研究外激励振幅、外激励频率、自身尺寸等因素对该系统振动压电的影响。

由上述文献可知, 前人对于含裂纹悬臂梁振动受力时所存在的分岔现象及混沌转迁频态研究较少, 尤其是对于具有非线性累积效应的悬臂梁系统少有研究^[8]。故本文在研究含裂纹压电悬臂梁的过程中, 搭建了压电悬臂梁在振动工况下的

第一作者简介: 王晓军(1996—), 男, 甘肃酒泉人, 硕士研究生, 研究方向为非线性动力学, 919759805@qq.com。

振动系统模型^[9],通过选用变步长4阶Runge-Kutta法对其振动模型进行数值仿真,选择一个碰撞界面作为Poincaré映射截面来研究其非线性累积效应,发现含裂纹梁体振动系统中存在Hopf分岔和混沌演变^[10],并且通过给出的Hopf分岔的具体系统参数及利用多尺度法构解梁体振动系统的动态响应,对不同激振频率作用下压电悬臂梁的振动响应特性进行探析。这些研究将为实际工业中机械电子系统和冲击振动系统的动力学优化提供理论参考。

1 力学模型及运动微分方程

图1是含裂纹压电悬臂梁振动受力简化模型图。

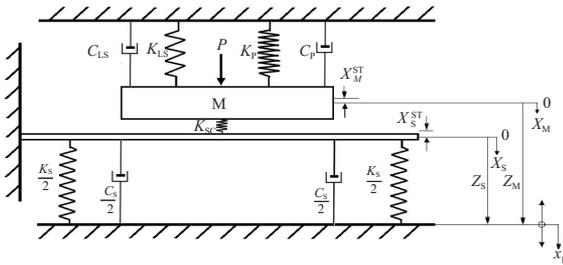


图1 含裂纹压电悬臂梁振动系统动力学模型

模拟含裂纹压电悬臂梁工作受力振动特性用图1物理模型描述。此时,裂纹是闭合的,振动块M附着在两个弹簧和两个阻尼器上,其中 K_{LS} 和 C_{LS} 分别表示气缸弹簧的刚度和阻尼, K_P 和 C_P 分别表示叶片弹簧的刚度和阻尼。裂纹梁体建模为离散线性弹簧 K_S ,具有黏性阻尼系数 C_S ,该梁体连接两个刚度为 $K_S/2$ 的无质量弹簧和两个黏性阻尼为 $C_S/2$ 的无质量阻尼器。接触刚度 K_{SC} 比梁体刚度 K_S 大很多倍,基座激励到振动块时:

$$X_M^{ST} = X_S^{ST} = X_S = (X_M^{ST} + P + mg) / (K_{LS} + K_S) \quad (1)$$

当振动块和梁体接触时,系统的运动微分方程可以表示为

$$m\ddot{Z}_M + (C_{LS} + C_P + C_S)\dot{Z}_M + (K_{LS} + K_P + K_S)Z_M = mA\Omega^2 \sin\Omega T \quad (2)$$

在式(2)中,静载荷 P 与重力 mg 由弹簧的初始挠度相互补偿。当质量块的惯性力较大时,在静力作用下,振动块与梁体分离开来,即 $Z_M < Z_S$ 。此时运动方程为

$$\begin{cases} m\ddot{Z}_M + (C_{LS} + C_P + C_S)\dot{Z}_M + (K_{LS} + K_P + K_S)Z_M = \\ P + mg + mA\Omega^2 \sin\Omega T \\ C_S\dot{Z}_S + K_S(Z_S + X_M^{ST}) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

式中 Z_S 表示梁体位移。引入无量纲参数为: $t =$

$$T\omega_{LS}; x_1 = \frac{\dot{Z}_M}{A}; x_2 = x_1 = \frac{\dot{Z}_M}{A\omega_S}; x_3 = \frac{Z_S}{A}; x_b = \frac{X_B}{A} = \sin\omega t;$$

$$\omega_{LS} = \sqrt{\frac{K_{LS}}{m}}; \zeta_{LS} = \frac{C_{LS}}{2m\omega_{LS}}; \omega_P = \sqrt{\frac{K_P}{m}}; \zeta_P = \frac{C_P}{2m\omega_P}; \omega_S =$$

$$\sqrt{\frac{K_S}{m}}; \zeta_S = \frac{C_S}{2m\omega_S}; \lambda = \sqrt{\frac{K_P}{K_{LS}}}; \vartheta = \sqrt{\frac{K_S}{K_{LS}}}; \gamma = \frac{X^{ST}}{A}; f =$$

$$\frac{P + mg}{mA\omega_{LS}^2}; \omega = \Omega \sqrt{\frac{K_P}{K_{LS}}}。$$

在接触阶段,振动块的位移等于梁体的位移; $x_1 = x_3$,作用在梁体上的力大于0,则

$$2\zeta_S \dot{x}_3 + \vartheta x_3 + \vartheta \gamma > 0 \quad (4)$$

无量纲形式的运动方程为

$$\dot{x}_2 = -(1 + \lambda^2 + \vartheta^2)x_1 - (2\zeta_{LS} + 2\zeta_P\lambda + 2\zeta_S\vartheta)x_2 + \omega^2 \sin\omega t \quad (5)$$

当振动块与梁体分离时,梁体 \dot{x}_3 的速度降至0。定义一组辅助函数 G_1 和 G_2 ,则系统的分段线性性质可以用Heaviside阶跃函数描述:

$$\begin{cases} G_1 = G_1(x_1, x_3) = H(x_1 - x_3) \\ G_2 = G_2(x_3, \dot{x}_3) = H(2\zeta_S \dot{x}_3 + \vartheta x_3 + \vartheta \gamma) \end{cases} \quad (6)$$

因此,可能接触情况下的运动方程可以用以下一组微分方程来描述:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -(1 + \lambda^2)x_1 - (2\zeta_{LS} + 2\zeta_P\lambda)x_2 - \\ G_1 G_2 (2\zeta_S \vartheta x_2 + \vartheta^2 x_3 + \vartheta^2 \gamma) - \gamma + f + \omega^2 \sin\omega t \\ \dot{x}_3 = G_1 G_2 x_2 + (1 - G_1)(1 - G_2) \left[-\frac{\vartheta}{2\zeta_S} (x_3 + \gamma) \right] \end{cases} \quad (7)$$

根据以上的微分方程计算,对其进行Matlab数值仿真。

2 振动系统分岔及混沌频态迁移

选取系统的一组参数: $\zeta_{LS} = 0.1; \zeta_P = 0.1; \zeta_S = 0.2; \lambda = 4; \vartheta = 15; f = 25$ 。

激振频率 ω 为分岔参数,由图2可知系统在 $\omega = 3.541$ 附近由3周期发生了Hopf分岔,从而系统进入了概周期运动。当 $\omega = 3.542$ 附近时由概周期突变为15周期运动,随着 ω 的增大系统经历了多次跳跃、突变,存在多周期、概周期,最终系统变为混沌运动。在上述参数不变情况下从Poincaré截面图分析系统在 $\omega \in [3.5, 3.6]$ 的局部动力学特性,如图3所示。

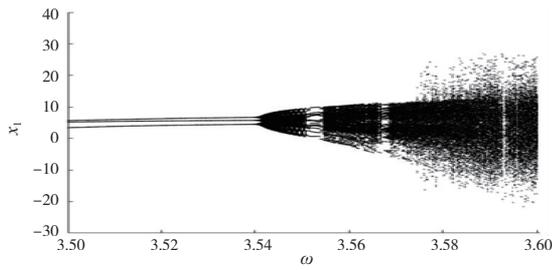


图2 分岔图

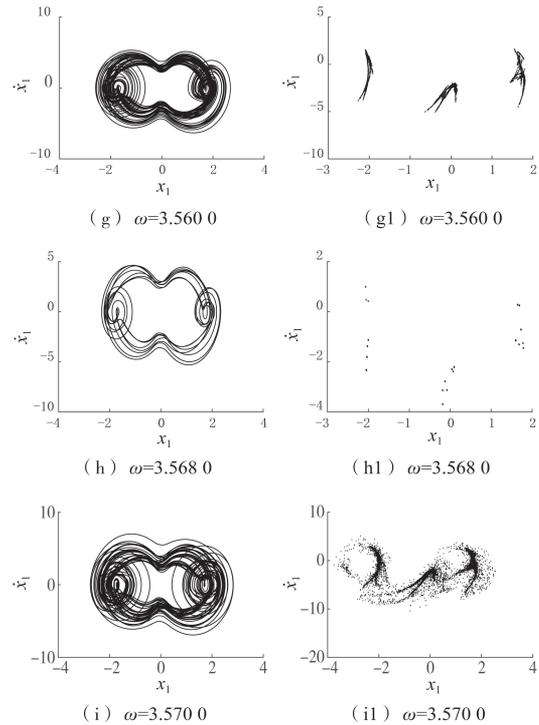
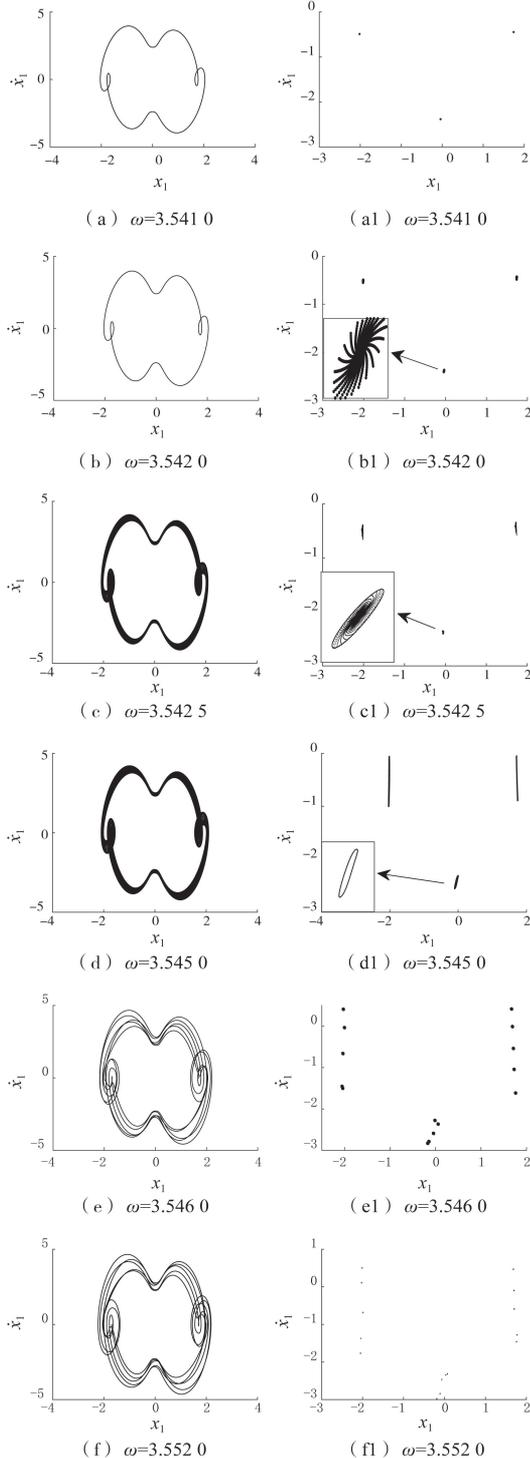


图3 投影映射图

数值结果表明,当 $\omega < 3.542$ 时,系统具有稳定的 $n-3$ 周期运动。当 $\omega = 3.542$ 时,系统发生 Hopf 分岔, $n-3$ 周期运动失稳并分岔出概周期运动,在投影的 Poincaré 截面上首先演变成稳定的焦点,如图 3 (b1) 所示;继而随着参数渐变增加形成 hopf 圈,如图 3 (c1) 所示;值得注意的是在分岔点附近的吸引不变圈具有光滑性,如图 3 (d1) 所示;但随着参数 ω 的逐渐增加,吸引不变圈逐渐膨胀并且其光滑性也遭到破坏,如图 3 (e1) 所示。随着参数 ω 的进一步增加,系统的概周期运动锁相到如图 3 (f) 所示周期运动。参数 ω 继续增加,系统发生阵发性混沌运动,如图 3 (g) — 图 3 (i) 所示,即参数 ω 持续增加之后持续发生混沌。

3 多尺度法

引入不同尺度的时间变量,在非线形系统中,不同的时间尺度表达式为:

$$T_n = \zeta^n t \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (8)$$

$$x(t, \zeta) = \sum_{n=0}^m \zeta^n x_n(T_0, T_1, T_2, \dots, T_m) \quad (9)$$

对式 (7) 无量纲化得到受迫振动系统无量纲方程:

$$\ddot{z} + z + \delta(c_1 \dot{z} + k_{m1} z^3 + k_{m2} z^3 - A_1 \sin \omega_1 t_1) = 0 \quad (10)$$

在讨论接近共振的受迫系统时,设激励频率与固有频率间存在微小差距系数 σ ,使 $\omega^2 = \omega_1^2 +$

σ , 将其带入式(10)中可得:

$$\ddot{z} + z = \delta(A_1 \sin \omega_1 t_1 + \sigma z - c_1 \dot{z} - k_{m1} z^2 - k_{m2} z^3) \quad (11)$$

考虑一次解, 令

$$z = z_0(T_0, T_1) + \zeta z_1(T_0, T_1) \quad (12)$$

将式(12)代入式(11)中, 令 δ 两边同次幂系数相等, 则可得:

$$D_0^2 z_0 = 0 \quad (13)$$

$$D_0^2 z_1 + z_1 = A_1 \sin \omega_1 t_1 + \sigma z_0 - c_1 z_0 D_0 - k_{m1} z_0^2 - k_{m2} z_0^3 - 2D_0 D_1 z_0 \quad (14)$$

考虑久期项, 则由式(14)得

$$z_1 = \frac{1}{3} k_{m1} A^2 e^{2iT_0} + \frac{1}{8} A^3 e^{3iT_0} + 2k_{m1} A \bar{A} + cc \quad (15)$$

故设复函数 A 的指数形式为

$$A(t) = \frac{1}{2} a(t) e^{i\theta(t)} \quad (16)$$

式中 $a(t)$ 、 $\theta(t)$ 为 t 的实函数。由此可以求得

$$\begin{cases} \dot{a} = -\frac{1}{2} a c_1 + \frac{A_1}{2} \sin(\sigma T_1 - \theta) \\ \dot{\theta} = \frac{3}{8} k_{m2} a^2 - \frac{A_1}{2} \cos(\sigma T_1 - \theta) \end{cases} \quad (17)$$

通过系统共振幅频关系, 可得 σ 与 a 的关系式:

$$\sigma = \frac{3}{8} k_{m2} a^2 \pm \sqrt{\left(\frac{\omega^2 - c_1^2}{4a} - \frac{c_1^2}{4}\right)} \quad (18)$$

所研究对象是含裂纹悬臂梁, 梁结构的基体材料是低碳合金钢 AISI1050^[11], 取阻尼数值分别为 $C_1 = 8\ 000$ ns/m、 $C_2 = 10\ 000$ ns/m、 $C_3 = 11\ 000$ ns/m; 固有频率为 $\omega_1 = 1$ 、 $\omega_2 = 2$ 、 $\omega_3 = 3$, 可忽略梁体本身质量的影响, 只考虑单自由度振动系统参数。

利用多尺度法求得非线性受迫运动 1 阶近似结果中的幅频特性关系如图 4 所示。带入系统参数, 考虑系统处于接近共振状态, 固有频率与主振频率相接近。通过选取不同的系统参数, 分析系统参数对系统幅频特性的影响, 从图 4 中看出, 当频率协调参数 σ 逐渐增大时, 系统的幅值也在逐渐增大, 且含裂纹梁体系统未进入分岔阶段时, 系统处于一定的周期稳定状态, 振动幅度较小; 系统进入分岔阶段时, 随着频率协调参数的增大, 振幅也随之增大, 系统开始逐渐由稳定趋于不稳定状态, 且幅值会随固有频率 ω 的增大而增大, 随阻尼 C 的增大而减小。

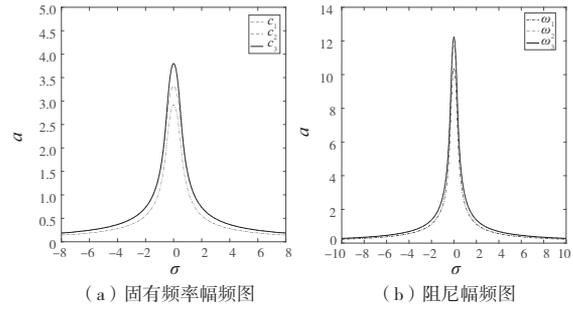


图 4 不同参数下的幅频特性

4 结语

通过对含裂纹压电悬臂梁振动系统所表现的非线性响应特性的分析, 结论如下。

1) 选择适当的系统参数, 分析压电悬臂梁受迫振动系统的分岔与频态转迁行为, 可以避免压电悬臂梁体机械电子系统工作在不稳定状态下减少噪声并改善工作环境。

2) 分岔频态所表现的转迁趋势、裂纹压电悬臂梁结构的振动响应具有强非线性, 较好地揭示了非线性裂纹梁所表现的转迁频态原理。

3) 通过幅频谱表明, 压电悬臂梁振动以低频频率为主。在控制系统混沌运动研究和机械电子器件制造等方面均具有一定的理论指导意义和实际参考意义。

参考文献:

- [1] PAPAPOPOULOS C A, Dimarogonas A D. Coupled vibration of cracked shafts [J]. Journal of Vibration & Acoustics, 1992, 114(4):461-467.
- [2] 刘淑彦. 压电悬臂梁结构的动力学研究 [D]. 北京: 北京工业大学, 2013.
- [3] 宋向荣, 田阿利, 吴杰, 等. 含呼吸式斜裂纹梁的非线性振动分析 [J]. 江苏科技大学学报(自然科学版), 2023, 37(1):15-20.
- [4] NASIM M A. Effects of heavy vehicle dynamic loading on rigid pavements [M]. Ann Arbor: University of Michigan, 1992.
- [5] 杨晓, 雷菲菲, 汪德江. 基于裂纹扭转弹簧模型的 Timoshenko 裂纹梁动力特性分析 [J]. 应用力学学报, 2020, 37(3):1115-1124, 1394.
- [6] 何奥迪, 王晓伟. 含轴承内环间隙的转子非线性动力学建模 [J]. 机械制造与自动化, 2022, 51(4):124-128.
- [7] 马立. L 型压电悬臂梁结构的发电特性与非线性动力学研究 [D]. 北京: 北京工业大学, 2018.

(下转第 108 页)

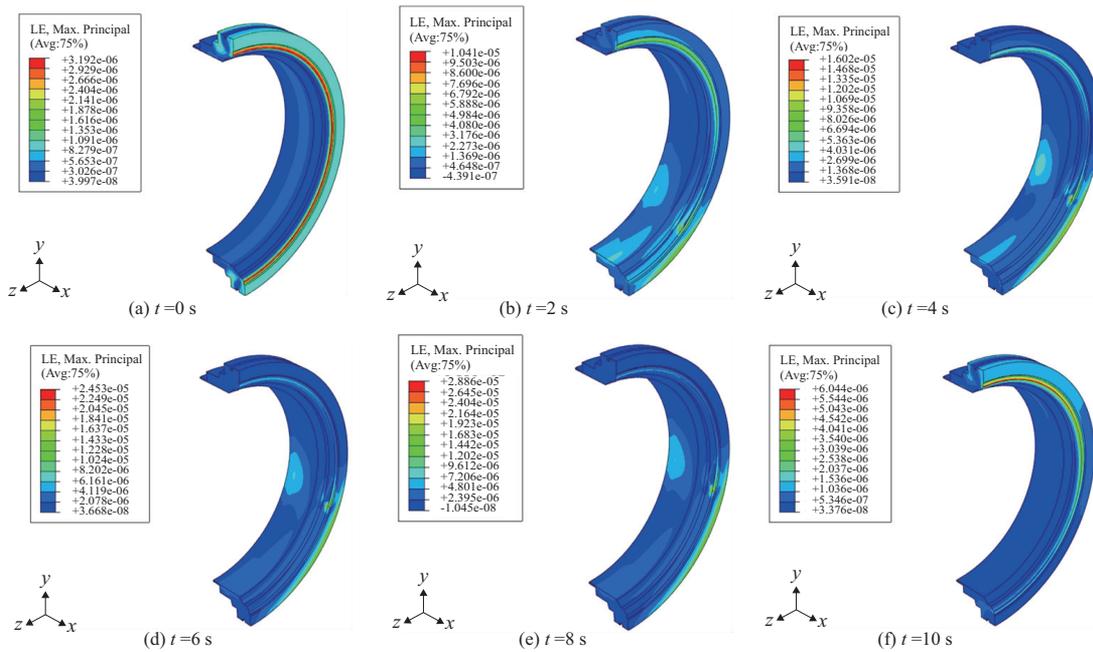


图9 等效应变演变规律

参考文献:

- [1] 赵明岩. 计算机辅助公差设计模块的研究[J]. 机械工程师, 2002(10): 10-11.
- [2] 许菊若. 计算机辅助公差设计技术的若干应用[J]. 江南大学学报, 2002(1): 17-19.
- [3] 苏朋. 365 nm 光刻照明系统中变焦系统的设计及公差分析[J]. 红外与激光工程, 2022, 51(7): 253-257.
- [4] 戴宏伟, 陈琨, 于慧, 等. 雅可比旋量的装配体并联结构公差分析方法研究[J]. 西安交通大学学报, 2022, 56(5): 156-165, 222.
- [5] FRÈRE L M, ROYER M, FOURCADE J. Tolerance analysis using a Computer Aided Tolerancing Software: ANATOLE 3D[J]. Procedia CIRP, 2018, 75: 267-272.
- [6] 冯玉龙, 杨康新, 杨昌群, 等. 新型四阀瓣式无摩擦球阀结构的研制[J]. 油气储运, 2021, 40(7): 796-801.
- [7] 初红艳, 于海辉, 蔡力钢, 等. 采用 SolidWorks 的印刷机咬纸机构装配误差分析[J]. 现代制造工程, 2012(5): 122-125.
- [8] 孟巧凤, 张林鎰, 尹琳峥, 等. 基于 3DCS 的三维尺寸公差的分析与优化[J]. 系统仿真学报, 2018, 30(5): 1730-1738.
- [9] 丁浩亮, 张凌东, 于晗, 等. 超低温球阀用聚三氟氯乙烯密封环的热压工艺与性能[J]. 合成树脂及塑料, 2021, 38(2): 67-70.
- [10] 于晗, 丁浩亮, 李星华, 等. 球阀阀座用聚三氟氯乙烯密封环工艺与性能[J]. 宇航材料工艺, 2020, 50(6): 59-63.
- [11] 茅健, 徐朋, 杨将新, 等. 基于白光扫描干涉的振动补偿方法[J]. 中国机械工程, 2015, 26(10): 1301-1305.
- [12] 张亦孟. 基于扭矩测量的球阀故障识别方法研究[D]. 北京: 北京化工大学, 2020.
- [13] 施钦天, 黄赛荣, 刘辉, 等. 温度变化对球阀扭矩的影响[J]. 阀门, 2023(2): 175-179.

收稿日期: 2024-06-06

(上接第 97 页)

- [8] 吴鑫, 乐源. 一类悬臂梁双侧碰撞系统的全局动力学研究[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2020, 34(1): 140-147.
- [9] ATTARI DEZFULI M, ZEINODDINI M, MASHHADI HARATI R. An analytical model for the coupled-field dynamic fatigue crack growth in a metallic beam under chaotic excitations[J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2020, 109: 102726.

- [10] 罗冠炜, 谢建华. 一类含间隙振动系统的周期运动稳定性、分岔与混沌形成过程研究[J]. 固体力学学报, 2003, 24(3): 284-292.
- [11] DENTSORAS A J, DIMAROGONAS A D. Resonance controlled fatigue crack propagation in a beam under longitudinal vibrations [J]. International Journal of Fracture, 1983, 23(1): 15-22.

收稿日期: 2023-07-17