

DOI:10.19344/j.cnki.issn1671-5276.2025.02.010

含惰轮的齿轮传动系统动力学分析

刘崇强,张红兵,李万祥

(兰州交通大学 机电工程学院,甘肃 兰州 730070)

摘要:以含惰轮的齿轮系统为研究对象,建立惰轮系统 6 自由度模型,推导了惰轮系统的无量纲动力学方程,用变步长 4—5 阶 Runge-Kutta 法,通过对惰轮系统 1 组系统参数的数值仿真,借助 Poincaré 截面图分析发现惰轮系统中存在周期运动、阵发混沌和 Hopf 分岔,给出发生 Hopf 分岔的具体系统参数。对分岔与混沌行为的研究为此类齿轮系统的优化设计提供了理论参考。

关键词:惰轮;分岔;混沌

中图分类号:TH113 **文献标志码:**A **文章编号:**1671-5276(2025)02-0052-05

Dynamic Analysis of Idler Gear Transmission System

LIU Chongqiang, ZHANG Hongbing, LI Wanxiang

(School of Mechanical and Electrical Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: The gear system with idler gear taken as the research object, a 6-degree-of-freedom model of the idler gear system was established, and the non-dimensional dynamic equation of the idler gear system was derived. By the variable step size of 4–5 Runge–Kutta method, and through the numerical simulation of the unified system parameters of the idler gear system, the Poincare cross-section was analyzed finding the existence of array chaos and Hopf bifurcation in the idler gear system, and the specific system parameters of Hopf bifurcation was given. The study of bifurcation and chaotic behavior provides a theoretical reference for the optimal design of such gear systems.

Keywords: idle gear; bifurcation; chaos

0 引言

齿轮传动系统中往往存在间隙,在实际工作过程中考虑到加工误差、装配误差或受热膨胀因素的存在,工作之前就留有一定的间隙;在工作中,由于齿轮系统啮合产生的综合误差以及啮合过程单双齿不停地交替啮合导致了啮合时变刚度,使得齿轮传动系统成为一个强非线性系统。含惰轮齿轮系统多用于大型采煤机行走部和摇臂齿轮传动系统,包括驱动轮、惰轮和从动轮。由于井下采煤空间有限,且需要长距离传输动力,惰轮可以很好地匹配这样的工况。惰轮是不做功的轮子,用于连接较远的轴,对系统稳定有帮助^[1]。采煤机摇臂将截割电机动力传递到滚筒,摇臂内部有众多齿轮传动系统,其中惰轮为摇臂齿轮传动系统的一个关键零件。在切割煤岩过程中,齿轮传动系统承受振动和冲击载荷,使惰轮容易发生疲劳失效^[2]。由于间隙的存在,会对系统的动态特性产生不利的影响,有的时候会导致严重的后果。因此,对于齿轮传动系统进行动力学优化设

计,提高可靠性以及降低噪声等问题的研究,既有理论价值又有着重大的现实意义。因此,齿轮传动系统动力学以及齿轮传动系统的研究与应用是国内外学者所感兴趣的^[3]。

KAHRAMAN 等^[4]建立了单自由度直齿轮传动系统的动力学模型,考虑了系统受到的激励影响,分析了系统的动力学响应结果,研究发现载荷、阻尼比和齿侧间隙导致系统出现混沌和次谐波响应,并且载荷会改变系统的冲击状态。KAHRAMAN 的研究成果奠定了齿轮动力学的研究基础。李万祥等^[5]首次证明单自由度含间隙系统中不仅存在叉式分岔、倍周期分岔,而且还存在 Hopf 分岔,并且给出了发生 Hopf 分岔的具体系统参数。李扬等^[6]以单级直齿轮传动系统为研究对象,研究了齿侧间隙对系统振动特性的影响。胡鹏^[7]建立二级传动扭振数学模型,采用多谐波平衡法对系统的稳态响应进行近似解析求解。ARIAN 等^[8]通过对直齿轮传动系统混沌动力学的研究,提出一种直齿轮传动系统的混沌控制器,并用所建立的直齿轮非线性模型验证了所提控制

第一作者简介:刘崇强(1998—),男,山西朔州人,硕士研究生,研究方向为非线性动力学,liucq0825@163.com。

器的性能。杨富春等^[9]建立了包含多齿隙的两级直齿轮减速器的 8 自由度非线性动力学模型并分析了齿轮副的工作状态,得出齿隙等非线性因素使系统的振动具有了丰富的非线性特性,且对齿轮副分离和冲击有很大影响。

本文选择一个周期界面作为 Poincaré 截面,用数值法分析了含惰轮的齿轮传动系统的分岔与混沌的形成过程。证明惰轮系统含有丰富的动力学现象,包括阵发混沌和 Hopf 分岔,并且给出了发生 Hopf 分岔的具体系统参数。对其周期运动及分岔特性进行研究,从而优化动力学参数,为实际应用中惰轮系统的动力学参数设计提供理论参考。

1 力学模型及其运动微分方程

对含惰轮的齿轮传动系统做出如下假设:

1) 轴为刚体并且不考虑其质量,轴承为弹性支承,总体简化为弹簧和阻尼;

2) 齿轮是刚体,但啮合齿可以用等效刚度和等效阻尼表示;

3) 齿轮的啮合阻尼不变,不受侧隙引起的非线性影响。

图 1 所示为 6 自由度含惰轮的齿轮传动系统。图中 M_i 、 θ_i 、 R_i 分别为齿轮的质量、转角和分度圆半径; T_1 和 T_2 分别为激励转矩和负载转矩; c_i 为轴承阻尼; c_{ii} 为啮合阻尼; k_i 为轴承刚度; $e(t)_i$ 为啮合综合误差; $K(t)_i$ 为时变的啮合刚度; $f(x)$ 为齿侧间隙函数。图 1 中的齿轮参数如表 1 所示。

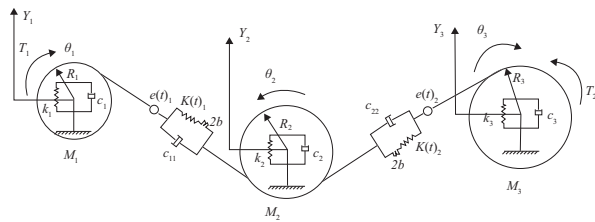


图 1 6 自由度惰轮系统动力学模型

表 1 惰轮传动系统齿轮的参数

系统参数	主动轮	惰轮	从动轮
齿数	36	44	48
压力角/(°)	20	20	20
模数/mm	7	7	7
质量/kg	16.0	20.0	22.5
转动惯量/(kg·m ²)	0.254	0.474	0.635

对模型进行受力分析,考虑齿侧间隙、时变啮合刚度、啮合综合传递误差,根据牛顿定律,得到惰轮系统的 6 自由度方程:

$$\begin{cases} M_1 \ddot{Y}_1 + c_{11} \dot{Y}_1 + k_{11} Y_1 = K(t)_1 f(Q_1) + c_{11} \dot{Q}_1 \\ I_1 \ddot{\theta}_1 + c_{11} R_1 \dot{Q}_1 + K(t)_1 R_1 f(Q_1) = T_1 \\ M_2 \ddot{Y}_2 + c_{22} \dot{Y}_2 + k_{22} Y_2 = -K(t)_1 f(Q_1) - \\ c_{11} \dot{Q}_1 + c_{12} \dot{Q}_2 + K(t)_2 f(Q_2) \\ I_2 \ddot{\theta}_2 - K(t)_1 R_2 f(Q_1) - c_{11} R_2 \dot{Q}_1 + \\ c_{22} R_2 \dot{Q}_2 + K(t)_2 R_2 f(Q_2) = 0 \\ M_3 \ddot{Y}_3 + c_{33} \dot{Y}_3 + k_{33} Y_3 = -c_{22} \dot{Q}_2 - K(t)_2 f(Q_2) \\ I_3 \ddot{\theta}_3 - c_{22} R_3 \dot{Q}_2 - K(t)_2 R_3 f(Q_2) = -T_2 \end{cases} \quad (1)$$

式中: I_i 为齿轮的转动惯量; Y_i 为齿轮沿 y 轴的振动位移; Q_1 和 Q_2 分别为引入的一级和二级传动齿轮副相对位移。

其中:

$$\begin{cases} Q_1 = Y_1 + R_1 \theta_1 - Y_2 - R_2 \theta_2 - e(t)_1 \\ Q_2 = Y_2 + R_2 \theta_2 - Y_3 - R_3 \theta_3 - e(t)_2 \end{cases} \quad (2)$$

啮合刚度取 Fourier 级数展开一阶谐波分量,一级啮合刚度 $K(t)_1 = k_{m1} + k_{a1} \cos(\omega_h t)$;二级啮合刚度 $K(t)_2 = k_{m2} + k_{a2} \cos(\mu \omega_h t)$ 。其中 k_{mi} 为平均啮合刚度, k_{ai} 为一阶谐波分量幅值与平均啮合刚度的比值, ω_h 为齿轮副啮合频率。

综合误差采用啮合频率函数的一次谐波形式。一级啮合综合误差 $e(t)_1 = F_{a1} \cos(\omega_h t)$;二级啮合综合误差 $e(t)_2 = F_{a2} \cos(\mu \omega_h t)$, μ 为一级二级齿轮传动啮合频率之比。

通过引入的齿轮副相对位移将动量矩方程合并:

$$\begin{cases} R_1 \ddot{\theta}_1 - R_2 \ddot{\theta}_2 + \frac{c_{11}}{m_1} \dot{Q}_1 + \frac{K(t)_1}{m_1} f(Q_1) - \\ \frac{c_{22}}{m_2} \dot{Q}_2 - \frac{K(t)_2}{m_2} f(Q_2) = \frac{T_1 R_1}{I_1} \\ R_2 \ddot{\theta}_2 - R_3 \ddot{\theta}_3 - \frac{c_{11}}{m_2} \dot{Q}_1 - \frac{K(t)_1}{m_2} f(Q_1) + \\ \frac{c_{22}}{m_3} \dot{Q}_2 + \frac{K(t)_2}{m_3} f(Q_2) = \frac{T_2 R_3}{I_3} \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{式中: } m_1 = \frac{I_1 I_2}{I_2 R_1^2 + I_1 R_2^2}; m_2 = \frac{I_2}{R_2^2}; m_3 = \frac{I_2 I_3}{I_2 R_3^2 + I_3 R_2^2}。$$

则系统的动力学方程可以调整为

$$\begin{cases}
 M_1 \ddot{Y}_1 + c_{11} \dot{Y}_1 + k_{11} Y_1 = K(t)_1 f(Q_1) + c_{11} \dot{Q}_1 \\
 M_2 \ddot{Y}_2 + c_{22} \dot{Y}_2 + k_{22} Y_2 = -K(t)_1 f(Q_1) - \\
 c_{11} \dot{Q}_1 + c_{22} \dot{Q}_2 + K(t)_2 f(Q_2) \\
 M_3 \ddot{Y}_3 + c_{33} \dot{Y}_3 + k_{33} Y_3 = -c_{22} \dot{Q}_2 - K(t)_2 f(Q_2) \\
 R_1 \ddot{\theta}_1 - R_2 \ddot{\theta}_2 + \frac{c_{11}}{m_1} \dot{Q}_1 + \frac{K(t)_1}{m_1} f(Q_1) - \\
 \frac{c_{11}}{m_2} \dot{Q}_2 - \frac{K(t)_2}{m_2} f(Q_2) = \frac{T_1 R_1}{I_1} \\
 R_2 \ddot{\theta}_2 - R_3 \ddot{\theta}_3 - \frac{c_{11}}{m_2} \dot{Q}_1 - \frac{K(t)_1}{m_2} f(Q_1) + \\
 \frac{c_{22}}{m_3} \dot{Q}_2 + \frac{K(t)_2}{m_3} f(Q_2) = \frac{T_2 R_3}{I_3}
 \end{cases} \quad (4)$$

引入无量纲时间 $\tau = \omega_n t$, $\omega_n = \sqrt{k_{m1}/m_1}$, 无量纲频率 $\omega = \omega_n/\omega_n$, 引入位移坐标尺度 b , 则无量纲位移为 $y_1 = Y_1/b, y_2 = Y_2/b, y_3 = Y_3/b, q_1 = Q_1/b, q_2 = Q_2/b$ 。

齿侧间隙的无量纲相对位移函数为

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x > 1 \\ 0, & |x| \leq 1 \\ x+1, & x < -1 \end{cases} \quad (5)$$

对方程(4)以 ω_n 为基准进行无量纲化处理, 得

$$\begin{cases}
 \ddot{y}_1 + 2\zeta_{11} \dot{y}_1 + k_{11} y_1 = 2\zeta_{12} \dot{q}_1 + \\
 k_{12} [1 + e_1 \cos(\omega\tau)] f(q_1) \\
 \ddot{y}_2 + 2\zeta_{22} \dot{y}_2 + k_{22} y_2 = -2\zeta_{21} \dot{q}_1 - \\
 k_{21} [1 + e_1 \cos(\omega\tau)] f(q_1) + \\
 2\zeta_{23} \dot{q}_2 + k_{23} [1 + e_2 \cos(\mu\omega\tau)] f(q_2) \\
 \ddot{y}_3 + 2\zeta_{33} \dot{y}_3 + k_{33} y_3 = -2\zeta_{31} \dot{q}_2 - \\
 k_{31} [1 + e_1 \cos(\mu\omega\tau)] f(q_2) \\
 \ddot{q}_1 - \ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 - F_{a1} \omega^2 \cos(\omega\tau) + \\
 2\zeta_{41} \dot{q}_2 + k_{41} [1 + e_1 \cos(\omega\tau)] f(q_1) - \\
 2\zeta_{42} \dot{q}_2 - k_{42} [1 + e_1 \cos(\mu\omega\tau)] f(q_2) = F_{m1} \\
 \ddot{q}_2 - \ddot{y}_2 + \ddot{y}_3 - F_{a2} \mu^2 \omega^2 \cos(\mu\omega\tau) - \\
 2\zeta_{51} \dot{q}_1 - k_{51} [1 + e_1 \cos(\omega\tau)] f(q_1) + \\
 2\zeta_{52} \dot{q}_2 + k_{52} [1 + e_2 \cos(\mu\omega\tau)] f(q_2) = F_{m2}
 \end{cases} \quad (6)$$

式中: $\zeta_{11} = c_{11}/(2M_1\omega_n)$; $\zeta_{12} = c_{11}/(2M_1\omega_n)$; $\zeta_{22} = c_{22}/(2M_2\omega_n)$; $\zeta_{21} = c_{11}/(2M_2\omega_n)$; $\zeta_{23} = c_{22}/(2M_2\omega_n)$; $\zeta_{33} = c_{33}/(2M_3\omega_n)$; $\zeta_{31} = c_{22}/(2M_3\omega_n)$; $\zeta_{41} = c_{11}/(2m_1\omega_n)$; $\zeta_{42} = c_{22}/(2m_2\omega_n)$; $\zeta_{51} = c_{11}/(2m_2\omega_n)$; $\zeta_{52} = c_{22}/(2m_3\omega_n)$; $k_{11} = \omega_1^2/\omega_n^2$; $k_{12} = k_{m1}/(M_1\omega_n^2)$;

$k_{22} = \omega_2^2/\omega_n^2$; $k_{21} = k_{m1}/(M_2\omega_n^2)$; $k_{23} = k_{m2}/(M_2\omega_n^2)$; $k_{33} = \omega_3^2/\omega_n^2$; $k_{31} = k_{m2}/(M_3\omega_n^2)$; $k_{41} = k_{m1}/(m_1\omega_n^2)$; $k_{42} = k_{m2}/(m_2\omega_n^2)$; $k_{51} = k_{m1}/(m_2\omega_n^2)$; $k_{52} = k_{m2}/(m_3\omega_n^2)$; e_1 和 e_2 为齿轮啮合刚度幅值, $e_1 = k_{a1}/k_{m1}$, $e_2 = k_{a2}/k_{m2}$; F_{mi} 为等效激振力, $F_{m1} = T_1 R_1/(I_1 \omega_n^2 b)$, $F_{m2} = T_2 R_3/(I_3 \omega_n^2 b)$; F_{a1} 和 F_{a2} 为齿轮传动误差的幅值。

2 激振频率对系统动力学行为影响

取 1 组参数 $F_{a1} = 0.5, F_{a2} = 2.5, F_{m1} = 0.60, F_{m2} = 0.05, \zeta_{11} = 0.100, \zeta_{12} = 0.020, \zeta_{23} = 0.007, k_{11} = 10, k_{22} = 8, k_{33} = 6, e_1 = 0.15, e_2 = 1.50, \mu = 0.1, b = 1$, 对上式非线性微分方程组采用 4—5 阶变步长 Runge-Kutta 数值方法进行求解, 可以得到系统在不同激振频率下的振动速度, 进而画出惰轮系统速度响应随不同激振频率变化的分岔图, 如图 2 所示。通过截取适当的 Poincaré 截面对分岔图进行分析, 得到了惰轮系统振动响应中混沌、概周期、周期运动 Hopf 分岔的 Poincaré 截面图, 进而对惰轮系统所处的振动状态进行判断。

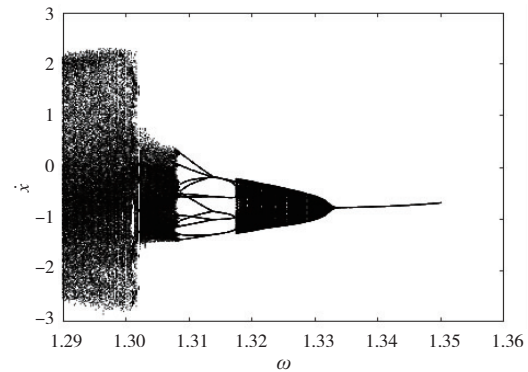
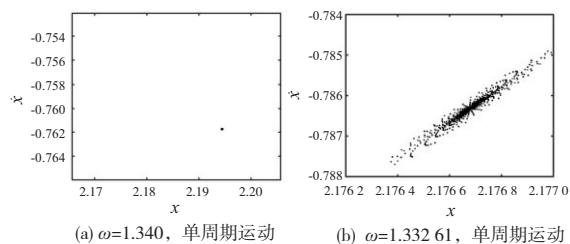


图 2 分岔图

2.1 系统的 Hopf 分岔及通向混沌的道路

随着激振频率的减小, 系统出现 Hopf 分岔, 并产生了人们不希望看到的混沌行为。为了更详尽地描述系统的 Hopf 分岔行为以及通向混沌的过程, 结合 Poincaré 截面图进行分析, 如图 3 所示。



(a) $\omega=1.340$, 单周期运动

(b) $\omega=1.33261$, 单周期运动

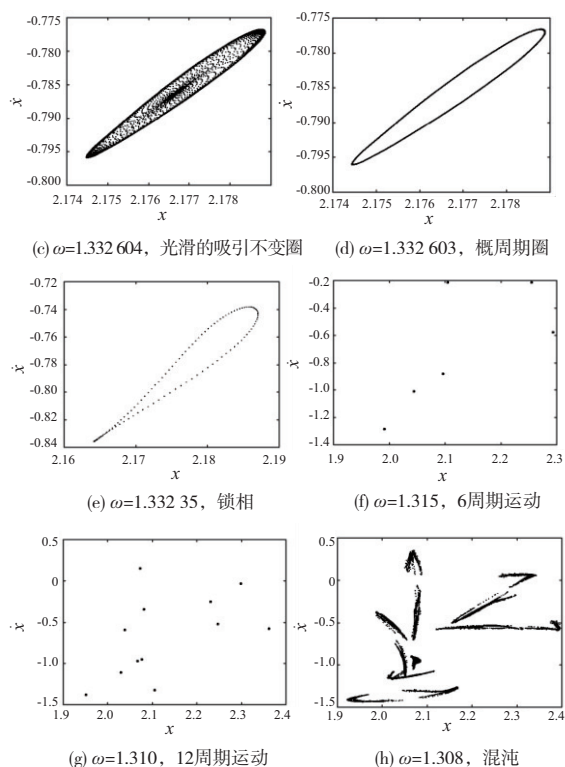


图3 Poincaré 截面图

当激励频率 $\omega = 1.340$ 时,系统的截面图为一个不动点。这时系统做稳定的单周期运动,如图3(a)所示;随着激励频率 ω 的减少,当 $\omega = 1.332\ 61$ 时,原来稳定的不动点变为稳定的焦点,如图3(b)所示;随着参数 ω 的增加,当 $\omega = 1.332\ 604$ 时,在截面图上形成一个光滑的吸引不变圈,发生 Hopf 分岔,如图3(c)所示;当 $\omega = 1.332\ 603$ 时,截面图为一个概周期圈,系统进入概周期运动,如图3(d)所示; $\omega = 1.332\ 35$, 概周期圈变形变尖,系统出现了锁相,如图3(e)所示; $\omega = 1.315$, 系统由锁相跃迁至6周期运动,如图3(f)所示; $\omega = 1.310$, 系统倍化为12周期运动,如图3(g)所示; $\omega = 1.308$, 系统由12周期运动进入混沌,如图3(h)所示。

2.2 阵发混沌分析

图4为上述参数画出的分岔图,为了更详尽地描述系统的阵发混沌行为,结合 Poincaré 截面图进行分析,如图5所示。

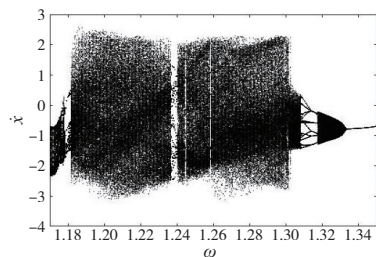


图4 分岔图

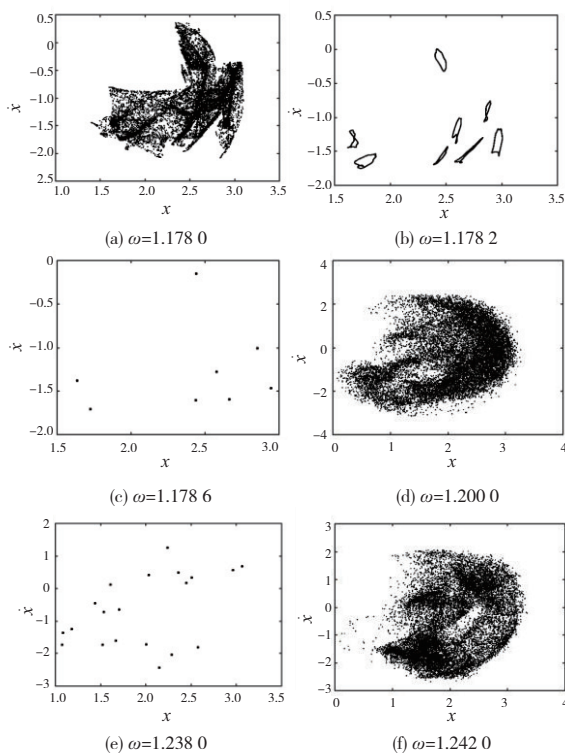


图5 Poincaré 截面图

阵发混沌的特点就是系统反复在周期运动、概周期运动和混沌之间交替变化。当 $\omega = 1.178\ 0$ 时,系统处于混沌,混沌吸引子如图5(a)所示;当 $\omega = 1.178\ 2$ 时,系统的截面图为几个概周期圈,此时系统处于概周期运动,如图5(b)所示;当 $\omega = 1.178\ 6$ 时,系统处于8周期运动,如图5(c)所示。当 $\omega = 1.200\ 0$ 时,系统又处于混沌,如图5(d)所示;当 $\omega = 1.238\ 0$ 时,系统处于20周期运动,如图5(e)所示;当 $\omega = 1.242\ 0$ 时,系统又处于混沌,如图5(f)所示。

2.3 不同阻尼比对系统的影响

图6为改变参数依次为 $\zeta_{12} = 0.010$, $\zeta_{23} = 0.002$; $\zeta_{12} = 0.010$, $\zeta_{23} = 0.007$; $\zeta_{12} = 0.020$, $\zeta_{23} = 0.007$, 其余参数不变所画的分岔图,从上到下依次为增大阻尼比,发现减小阻尼比之后系统进入混沌变早且混沌区域明显增加,阵发混沌现象更为突出。

3 结语

1) 通过对惰轮系统进行仿真,发现随着激励频率的变化,系统由 hopf 分岔转迁为混沌运动的路径和阵发混沌的现象,不同参数下也会出现类似的非线性行为。

2) 通过以上研究发现,在激励频率处于某些

数值时,混沌区间较大,在混沌区域内,速度的变化急剧。若在此区域内长期运行,对惰轮系统特别不利,应尽量避免此类现象的发生。可优化系统参数使惰轮系统处于合理的工作状况,例如在设计和制造时适当调高惰轮系统的阻尼比。这样可以为惰轮系统的优化设计提供一定的理论参考。

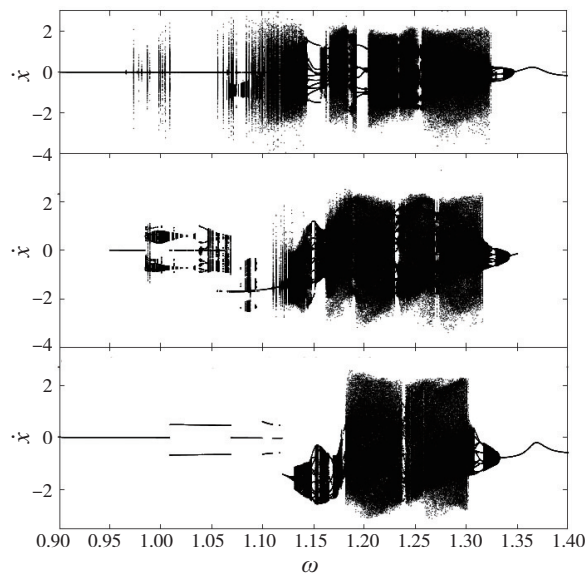


图6 分岔图

参考文献:

- [1] 孙桓,陈作模,葛文杰. 机械原理[M]. 第8版. 北京:高等教育出版社,2013:237-239.
- [2] 郝志勇,陈志强,毛君. 采煤机摇臂惰轮轴疲劳寿命分析[J]. 机械设计与研究,2017,33(2):85-89.
- [3] 李润方,王建军. 齿轮系统动力学:振动、冲击、噪声[M]. 北京:科学出版社,1997:259-264.
- [4] KAHRAMAN A, SINGH R. Non-linear dynamics of a spur gear pair[J]. Journal of Sound and Vibration, 1990,142(1):49-75.
- [5] 李万祥,牛卫中. 一类含间隙系统的分岔与混沌的形成过程[J]. 振动与冲击,2005,24(3):47-49,133.
- [6] 李扬,朱佳博,李伟,等. 含动态齿侧间隙的齿轮系统稳定性研究[J]. 机械制造与自动化,2023,52(3):16-19,36.
- [7] 胡鹏. 非线性齿轮系统动力学与稳态可靠性及灵敏度分析[D]. 沈阳:东北大学,2019.
- [8] ARIAN G, TAGHVAEI S. Dynamic analysis and chaos control of spur gear transmission system with idler[J]. European Journal of Mechanics - A,2021,87:104229.
- [9] 杨富春,周晓军,胡宏伟. 两级齿轮减速器非线性振动特性研究[J]. 浙江大学学报(工学版),2009,43(7):1243-1248.

收稿日期:2023-08-02

(上接第46页)

参考文献:

- [1] 布尔加科林夫. 航空齿轮传动和减速器手册[M]. 常春江,译. 北京:航空工业出版社,1988:199-203.
- [2] 况伟杰,苗倩. 镍基单晶高温合金微动摩擦磨损特性研究[J]. 机械制造与自动化,2021,50(6):21-24.
- [3] LU F, CHEN GD, SU H, et al. Progressive wear prediction of C/C composite finger seal based on ALE adaptive meshing strategy[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology,2017,231(5):604-615.
- [4] GÜRER G, GÜR C H. Failure analysis of fretting fatigue initiation and growth on railway axle press-fits[J]. Engineering Failure Analysis,2018,84:151-166.
- [5] KU P M, VALTIERRA M L. Splinewear-effects of design and lubrication[J]. Journal of Engineering for Industry, 1975,97(4):1257-1263.
- [6] XIAO L, XU YQ, SUN X W, et al. Experimental investigation on the effect of misalignment on the wear

failure for spline couplings[J]. Engineering Failure Analysis,2022,131:105755.

- [7] WU Y Z, LIANG Y L, YIN C H, et al. Analysis of factors affecting the wear failure of an aeroengine spline pair and evolution mechanism of the tribolayer[J]. Engineering Failure Analysis,2023,146:107113.
- [8] 余媛媛. 直升机尾传花键微动磨损仿真分析研究[D]. 重庆:重庆大学,2021.
- [9] 肖立,徐颖强,陈智勇,等. 直升机浮动渐开线花键微动磨损影响因素分析[J]. 航空动力学报,2021,36(4):751-766.
- [10] 肖立,徐颖强,陈智勇,等. 浮动渐开线花键微动损伤及磨损疲劳预测[J]. 西北工业大学学报,2022,40(3):549-559.
- [11] 蒋理宽. 浮动渐开线花键副微动磨损研究[D]. 湘潭:湘潭大学,2018.

收稿日期:2023-8-16